UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso 2019-2020 Modelo
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger una de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se quiere construir un invernadero para el cultivo de semillas con ambiente controlado de temperatura, humedad y composición del aire. El aire que hay que suministrar debe contener un 78% de nitrógeno, un 21% de oxígeno y un 1% de argón.

a) (0.5 puntos) Si la capacidad del invernadero es 2000 litros, determine cuántos litros de nitrógeno, cuántos de oxígeno y cuantos de argón son necesarios.

b) (2 puntos) Para suministrar el aire se dispone de tres mezclas gaseosas A, B y C, cuya composición se expresa en la tabla adjunta. Obtenga la cantidad que hay que utilizar de cada mezcla para llenar el invernadero de aire con la composición requerida.

Mezcla	Nitrógeno	Oxígeno	Argón
A	80%	20%	0%
B	70%	20%	10%
C	60%	40%	0%

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x)=e^{3x-2}$, se pide:

a) (1 punto) Determinar el punto en el que la tangente a la curva y = f(x) tiene pendiente igual a $3/e$ y escribir la ecuación de esta recta tangente.

b) (0.5 puntos) Calcular $\lim\limits_{x\to 2/3}\dfrac{1-f(x)}{6x-4}$.

c) (1 punto) Calcular el área de la superficie acotada por la curva y = f(x) y las rectas x = 0, y = 1.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las rectas $r_1\equiv\begin{cases}x=z-1\\ y=2-3z\end{cases}$, $r_2\equiv\begin{cases}x=4+5z\\ y=4z-3\end{cases}$, se pide:

a) (1.5 puntos) Estudiar su posición relativa y hallar la distancia entre ellas.

b) (1 punto) Hallar el punto de corte entre la recta r_2 y el plano que contiene a r_1 y pasa por el origen de coordenadas.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dados dos sucesos A y B, se conocen las siguientes probabilidades: $P(A \cup B) = 0{,}55$, $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0{,}90$ y $P(B/A) = 0{,}25$. Se pide:

a) (2 puntos) Calcular $P(A \cap B)$, $P(A)$, $P(B)$ y $P(B/\overline{A})$.

b) (0.5 puntos) Deducir de manera razonada si los sucesos A y B son independientes.

OPCION B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 5 & 10+3t \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3t+3 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el rango de la matriz A en función del parámetro t.
b) (1.5 puntos) Resolver el sistema AX = B, para los valores de t que lo hagan compatible y determinado.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el área del triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta tangente a la curva y = f(x) en x = 2.
b) (0.75 puntos) Determinar las posibles asíntotas de la curva y = f(x) y estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x).

c) (0.75 puntos) Calcular $\int_0^2 x \cdot f(x)\, dx$

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados los puntos A(1, 1, −2), B(3, −1, 4) y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = -2 + 5\lambda \\ z = 3 \end{cases}$, se pide:

a) (1.5 puntos) Calcular el área del triángulo OPQ, siendo O(0, 0, 0), P el punto medio del segmento AB y Q la intersección de la recta que pasa por A y B y el plano π ≡ z = 7.
b) (0.5 puntos) Hallar la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a la recta r.
c) (0.5 puntos) Calcular el coseno del ángulo que forman la recta r y la recta que pasa por A y B.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
En cierta ciudad se estima que la temperatura máxima de cada día, en el mes de junio, sigue una distribución normal de media 30ºC y varianza 25. Se pide:
a) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un día cualquiera del mes la temperatura máxima esté entre 28ºC y 32ºC.
b) (1 punto) Calcular el numero esperado de días del mes con máximo superior a 36^0C.
c) (0.75 puntos) Determinar la temperatura máxima alcanzada el día 10 de junio, sabiendo que dicha temperatura fue superada exactamente el 50% de los días del mes.

SOLUCIONES:

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Se quiere construir un invernadero para el cultivo de semillas con ambiente controlado de temperatura, humedad y composición del aire. El aire que hay que suministrar debe contener un 78% de nitrógeno, un 21% de oxígeno y un 1% de argón.
a) (0.5 puntos) Si la capacidad del invernadero es 2000 litros, determine cuántos litros de nitrógeno, cuántos de oxígeno y cuantos de argón son necesarios.
b) (2 puntos) Para suministrar el aire se dispone de tres mezclas gaseosas A, B y C, cuya composición se expresa en la tabla adjunta. Obtenga la cantidad que hay que utilizar de cada mezcla para llenar el invernadero de aire con la composición requerida.

Mezcla	Nitrógeno	Oxígeno	Argón
A	80%	20%	0%
B	70%	20%	10%
C	60%	40%	0%

a) Nitrógeno: $78\% \cdot 2000 \text{ litros} = 1560 \text{ litros}$

Oxígeno: $21\% \cdot 2000 \text{ litros} = 420 \text{ litros}$

Argón: $1\% \cdot 2000 \text{ litros} = 20 \text{ litros}$

$\boxed{\text{1560 litros de nitrógeno, 420 litros de oxígeno y 20 litros de argón.}}$

b) Llamamos a la mezcla A:x, a la mezcla B: y a la mezcla C: z. Tenemos entonces el sistema:

$$\begin{cases} 0,8x + 0,7y + 0,6z = 1560 \\ 0,2x + 0,2y + 0,4z = 420 \\ 0,1y = 20 \end{cases}$$

Que resolvemos por Gauss:

$$\begin{cases} 0,8x + 0,7y + 0,6z = 1560 \\ 0,2x + 0,2y + 0,4z = 420 \\ \qquad 0,1y = 20 \end{cases} \xrightarrow{F_2 = 8F_2 - F_1} \begin{cases} 0,8x + 0,7y + 0,6z = 1560 \\ \qquad 0,1y + z = 120 \\ \qquad 0,1y = 20 \end{cases}$$

De donde:

$$y = \frac{20}{0,1} = 200$$

$$0,1 \cdot 200 + z = 120 \quad \Rightarrow \quad z = 100$$

$$0,8x + 0,7 \cdot 200 + 0,6 \cdot 100 = 1560 \quad \Rightarrow \quad x = 1700$$

$\boxed{\text{1700 litros de la mezcla A, 200 litros de la mezcla B y 100 litros de la mezcla C.}}$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x)=e^{3x-2}$, se pide:

a) (1 punto) Determinar el punto en el que la tangente a la curva y = f(x) tiene pendiente igual a $3/e$ y escribir la ecuación de esta recta tangente.

b) (0.5 puntos) Calcular $\lim\limits_{x\to 2/3}\dfrac{1-f(x)}{6x-4}$.

c) (1 punto) Calcular el área de la superficie acotada por la curva y = f(x) y las rectas x = 0, y = 1.

a) La pendiente la obtenemos derivando la función y sustituyendo el punto de tangencia por lo que:

$$f'(x_0)=\frac{3}{e} \Rightarrow 3\cdot e^{3x_0-2}=\frac{3}{e} \Rightarrow e^{3x_0-2}=e^{-1} \Rightarrow 3x_0-2=-1 \Rightarrow x_0=1/3$$

La ecuación de la recta tangente es: $y-y_0=m(x-x_0)$, donde $y_0=f(1/3)$:

$$y_0=f(1/3)=e^{3\frac{1}{3}-2}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

Por lo que la recta tangente es: $y-\frac{1}{e}=\frac{3}{e}\left(x-\frac{1}{3}\right) \Rightarrow y=\frac{3}{e}x-\frac{1}{e}+\frac{1}{e} \Rightarrow \boxed{y=\frac{3}{e}x}$

b) $\lim\limits_{x\to 2/3}\dfrac{1-f(x)}{6x-4}=\lim\limits_{x\to 2/3}\dfrac{1-e^{3x-2}}{6x-4}=\dfrac{1-e^{3\frac{2}{3}-2}}{6\frac{2}{3}-4}=\dfrac{1-e^{0}}{0}=\dfrac{0}{0}$. Aplicamos L´Hôpital:

$$\lim_{x\to 2/3}\frac{1-e^{3x-2}}{6x-4}=\lim_{x\to 2/3}\frac{-3e^{3x-2}}{6}=\frac{-3e^{0}}{6}=\frac{-1}{2}\quad \boxed{\lim_{x\to 2/3}\frac{1-f(x)}{6x-4}=\frac{-1}{2}}$$

c) Buscamos el punto de corte de la función con y=1:

$$e^{3x-2}=1 \Rightarrow e^{3x-2}=e^{0} \Rightarrow 3x-2=0 \Rightarrow x=2/3$$

$$\int_0^{2/3}\left(1-e^{3x-2}\right)dx=\int_0^{2/3}dx-\int_0^{2/3}e^{3x-2}dx=\left[x-\frac{1}{3}e^{3x-2}\right]_0^{2/3}=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\left(e^{3\frac{2}{3}-2}-e^{0-2}\right)=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\left(1-e^{-2}\right)$$

$$\boxed{A=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{e^{2}}\right)\ u^{2}}$$

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las rectas $r_1\equiv\begin{cases}x=z-1\\ y=2-3z\end{cases}$, $r_2\equiv\begin{cases}x=4+5z\\ y=4z-3\end{cases}$, se pide:

a) (1.5 puntos) Estudiar su posición relativa y hallar la distancia entre ellas.

b) (1 punto) Hallar el punto de corte entre la recta r_2 y el plano que contiene a r_1 y pasa por el origen de coordenadas.

Sacamos un punto y un vector de cada una de las rectas:

$r_1 \equiv \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases}$ llamamos $z = \lambda$ y obtenemos $x = \lambda - 1,\ y = 2 - 3\lambda$. Luego la recta r_1 en paramétricas es: $\begin{cases} x = \lambda - 1 \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$. Luego el vector y el punto son: $A(-1,2,0)$ $\vec{v}_{r_1}(1,-3,1)$

$r_2 \equiv \begin{cases} x = 4 + 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases}$ llamamos $z = \lambda$ y obtenemos $x = 4 + 5\lambda,\ y = 4\lambda - 3$. Luego la recta r_2 en paramétricas es: $\begin{cases} x = 4 + 5\lambda \\ y = -3 + 4\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$. Luego el vector y el punto son: $B(4,-3,0)$ $\vec{v}_{r_2}(5,4,1)$

Los vectores de las dos rectas no son proporcionales, por lo que o son secantes o se cruzan. Para distinguir entre estas dos posibilidades, si son secantes, estarían en el mismo plano por lo que

$$\left[\vec{v}_{r_1}, \vec{v}_{r_2}, \overrightarrow{AB}\right] = 0$$

Calculamos el vector que nos falta: $\overrightarrow{AB} = B - A = (4,-3,0) - (-1,2,0) = (5,-5,0)$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -25 - 15 - 20 + 5 = -55 \neq 0$$

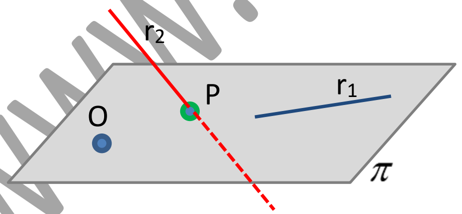
$\boxed{\text{Por lo que las rectas se cruzan.}}$

Para calcular la distancia aplicamos la fórmula: $d = \dfrac{\left[\vec{v}_{r_1}, \vec{v}_{r_2}, \overrightarrow{AB}\right]}{\left|\vec{v}_{r_1} \times \vec{v}_{r_2}\right|}$:

$$\vec{v}_{r_1} \times \vec{v}_{r_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -7\vec{i} + 4\vec{j} + 19\vec{k} \Rightarrow \left|\vec{v}_{r_1} \times \vec{v}_{r_2}\right| = \sqrt{(-7)^2 + 4^2 + 19^2} = \sqrt{426}$$

$$d = \frac{\left[\vec{v}_{r_1}, \vec{v}_{r_2}, \overrightarrow{AB}\right]}{\left|\vec{v}_{r_1} \times \vec{v}_{r_2}\right|} = \frac{|-55|}{\sqrt{426}} \quad \boxed{d = \frac{55\sqrt{426}}{426}\ u}$$

b)



Para obtener el plano π necesitamos dos vectores paralelos o contenidos al plano y un punto. Cogemos el vector de la recta y el vector que obtenemos de restar a cualquier punto de la recta el punto O:

$\vec{v}_{r_1}(1,-3,1)$ $\qquad \overrightarrow{OA} = A - O = (-1,2,0) - (0,0,0) = (-1,2,0)$

Con estos dos vectores y el punto O obtenemos la ecuación del plano:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x + y + z = 0$$

Para obtener ahora el punto de corte P de la recta r_2 con el plano π, resolvemos el sistema introduciendo la recta en el plano:

$$r_2:\begin{cases} x=4+5\lambda \\ y=-3+4\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

$$-2x+y+z=0 \Rightarrow -2(4+5\lambda)+-3+4\lambda+\lambda=0 \Rightarrow 15\lambda+5=0 \Rightarrow \lambda=-1/3$$

Luego el punto pedido lo obtenemos sustituyendo este valor en la recta r_2:

$$r_2:\begin{cases} x=4+5(-1/3)=7/3 \\ y=-3+4(-1/3)=-13/3 \\ z=-1/3 \end{cases} \boxed{P(7/3,-13/3,-1/3)}$$

<u>Ejercicio</u> 4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados dos sucesos A y B, se conocen las siguientes probabilidades: $P(A\cup B)=0{,}55$, $P(\bar{A}\cup\bar{B})=0{,}90$ y $P(B/A)=0{,}25$. Se pide:

a) (2 puntos) Calcular P(A ∩ B), P(A), P(B) y $P(B/\bar{A})$.

b) (0.5 puntos) Deducir de manera razonada si los sucesos A y B son independientes.

a) $P(A\cup B)=0{,}55$, $P(\bar{A}\cup\bar{B})=0{,}90$, $P(B/A)=0{,}25$

$$\left.\begin{array}{l} P(\bar{A}\cup\bar{B})=0{,}90 \\ P(\bar{A}\cup\bar{B})=1-P(A\cap B) \end{array}\right\} \Rightarrow 1-P(A\cap B)=0{,}9 \Rightarrow \boxed{P(A\cap B)=0{,}1}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(B/A)=0{,}25 \\ P(B/A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(A)}=0{,}25 \Rightarrow \frac{0{,}1}{P(A)}=0{,}25 \Rightarrow \boxed{P(A)=0{,}4}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cup B)=0{,}55 \\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \end{array}\right\} \Rightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}55 \Rightarrow 0{,}4+P(B)-0{,}1=0{,}55 \Rightarrow$$

$$\boxed{P(B)=0{,}25}$$

$$P(B/\bar{A})=\frac{P(B\cap\bar{A})}{P(\bar{A})}=\frac{0{,}15}{0{,}6}=0{,}25 \Rightarrow \boxed{P(B/\bar{A})=0{,}25}$$

$$P(B\cap\bar{A})=P(B)-P(B\cap A)=0{,}25-0{,}1=0{,}15$$

$$P(\bar{A})=1-P(A)=1-0{,}4=0{,}6$$

b) dos sucesos son independientes si $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

$$0{,}1=0{,}4\cdot 0{,}25$$

$\boxed{\text{A y B son sucesos independientes.}}$

OPCIÓN B

<u>Ejercicio</u> 1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2+t\\ 5 & 10+3t\\ -1 & -2\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3\\ 9\\ 3t+3\end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el rango de la matriz A en función del parámetro t.
b) (1.5 puntos) Resolver el sistema AX = B, para los valores de t que lo hagan compatible y determinado.

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 2+t\\ 5 & 10+3t\\ -1 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow[F_2:F_2-5F_1]{F_3:F_3+F_1} A=\begin{pmatrix}1 & 2+t\\ 0 & -2t\\ 0 & t\end{pmatrix}\xrightarrow{F_3:2F_3+F_2} A=\begin{pmatrix}1 & 2+t\\ 0 & -2t\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

Igualamos a 0 los términos que llevan t en la diagonal principal: $-2t=0 \Rightarrow t=0$

$$\boxed{\text{Si } t\neq 0 \Rightarrow Rg(A)=2}$$

Si $t=0$ $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow Rg(A)=1$ $\boxed{\text{Si } t=0 \Rightarrow Rg(A)=1}$

b) $A\cdot X=B\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2+t\\ 5 & 10+3t\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 9\\ 3t+3\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2+t & 3\\ 5 & 10+3t & 9\\ -1 & -1 & 3t+3\end{array}\right)\xrightarrow[F_3:F_3+F_1]{F_2:F_2-5F_1}\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2+t & 3\\ 0 & -2t & -6\\ 0 & t & 3t+6\end{array}\right)\xrightarrow{F_3:2F_3+F_2}\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2+t & 3\\ 0 & -2t & -6\\ 0 & 0 & 6t+6\end{array}\right)$$

Para que el sistema sea compatible determinado el rango debe ser 2 puesto que sólo hay dos incógnitas, por lo que $6t+6=0 \Rightarrow \boxed{t=-1}$

Para t=-1: $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -6\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x+y=3\\ -2y=-6\end{cases}$. Resolviendo el sistema: $\boxed{x=6,\ y=-3}$

<u>Ejercicio</u> 2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x)=\dfrac{3}{x+1}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el área del triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta tangente a la curva y = f(x) en x = 2.
b) (0.75 puntos) Determinar las posibles asíntotas de la curva y = f(x) y estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x).
c) (0.75 puntos) Calcular $\int_0^2 x\cdot f(x)\,dx$

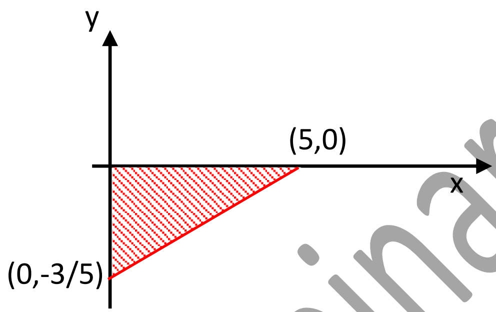
a) La ecuación de la recta tangente es: $y-y_0=m(x-x_0)$, donde $y_0=f(2)$ y $m=f'(2)$:

$$y_0=f(2)=\frac{3}{2+1}=1$$

$$f'(x)=\frac{-3}{(x+1)^2}\ \Rightarrow\ m=f'(2)=\frac{-3}{(2+1)^2}=\frac{-1}{3}$$

Por lo que la recta tangente es: $y-1=\frac{-1}{3}(x-2)\ \Rightarrow\ y=\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}$

Buscamos los puntos de corte con los ejes: $y=\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}\ \begin{cases} x=0\ \Rightarrow\ y=-5/3 \\ y=0\ \Rightarrow\ x=5 \end{cases}$



$$A=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{5\cdot 5/3}{2}=\frac{25}{6}\ u^2 \qquad \boxed{A=\frac{25}{6}\ u^2}$$

b) Asíntota vertical:

$x+1=0\ \Rightarrow\ x=-1\ \Rightarrow$ puede haber en x=-1:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-}\frac{3}{x+1}=\frac{3}{0^-}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+}\frac{3}{x+1}=\frac{3}{0^+}=+\infty \end{array}\right\}\ \boxed{\text{A.V. en } x=-1}$$

Asíntota horizontal:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x+1}=0\ \boxed{\text{A.H. en } y=0}$$

Crecimiento y decrecimiento: igualamos a cero la primera derivada: $f'(x)=\frac{-3}{(x+1)^2}$

$$f'(x)=0\ \Rightarrow\ \frac{-3}{(x+1)^2}=0\ \Rightarrow\ \text{No solución}$$

$f'(-2)<0$ $\quad$ $f'(0)<0$

-1

$\boxed{(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)\ f(x)\ \text{es decreciente}}$

c) $\int_0^2 x\cdot f(x)\,dx=\int_0^2 \frac{3x}{x+1}\,dx$. Para realizar la integral realizamos el cociente de polinomios:

$$\begin{array}{r|l} 3x & x+1 \\ \cline{2-2} -3x-3 & 3 \\ \hline -3 & \end{array}$$

Tenemos entonces que: $\frac{3x}{x+1}=3+\frac{-3}{x+1}$

$$\int_0^2 \frac{3x}{x+1}\,dx=\int_0^2\left(3+\frac{-3}{x+1}\right)dx=\left[3x-3\ln|x+1|\right]_0^2=(6-3\ln 3)-(0-3\ln 1)=6-3\ln 3 \quad \boxed{I=6-3\ln 3}$$

<u>Ejercicio</u> 3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados los puntos A(1, 1, −2), B(3, −1, 4) y la recta $r\equiv\begin{cases}x=1+3\lambda\\ y=-2+5\lambda\\ z=3\end{cases}$, se pide:

a) (1.5 puntos) Calcular el área del triángulo OPQ, siendo O(0, 0, 0), P el punto medio del segmento AB y Q la intersección de la recta que pasa por A y B y el plano π ≡ z = 7.

b) (0.5 puntos) Hallar la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a la recta r.

c) (0.5 puntos) Calcular el coseno del ángulo que forman la recta r y la recta que pasa por A y B.

a) La recta que pasa por A y B:

$$\vec{v}_s=\overrightarrow{AB}=B-A=(3,-1,4)-(1,1,-2)=(2,-2,6) \quad \vec{v}_s=(1,-1,3)$$

$$s\equiv\begin{cases}x=1+\mu\\ y=1-\mu\\ z=-2+3\mu\end{cases}$$

La intersección con el plano π ≡ z = 7:

$$-2+3\mu=7 \Rightarrow \mu=3$$

Luego el punto Q es: $Q(4,-2,7)$

El punto medio del segmento AB es: $PM=\frac{A+B}{2}=\frac{(1,1,-2)+(3,-1,4)}{2}=(2,0,1)$

Nos piden el área del triángulo OPQ: $A=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OP}x\overrightarrow{OQ}\right|$

Calculamos primero el módulo del producto vectorial:

$$\overrightarrow{OP}\ x\ \overrightarrow{OQ}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 0 & 1\\ 4 & -2 & 7\end{vmatrix}=2\vec{i}-10\vec{j}-4\vec{k} \Rightarrow \left|\overrightarrow{OP}\ x\ \overrightarrow{OQ}\right|=\sqrt{4+100+16}=\sqrt{120}$$

$$A=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OP}x\overrightarrow{OQ}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{120} \quad \boxed{A=\sqrt{30}\ u^2}$$

b) Ecuación normal del plano: $Ax+By+Cz+D=0$, donde (A, B, C) es el vector normal del plano, en este caso, el director de la recta: $3x+5y+0z+D=0$.

Al pasar por el punto A (1, 1, -2): $3\cdot 1+5\cdot 1+D=0 \Rightarrow D=-8$

Luego la ecuación del plano buscada es: $\boxed{3x+5y-8=0}$

c) $\cos\alpha=\dfrac{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|}{|\vec{v}_r|\cdot|\vec{v}_s|}=\dfrac{|(3,5,0)\cdot(1,-1,3)|}{\sqrt{9+25}\cdot\sqrt{1+1+9}}=\dfrac{2}{\sqrt{374}}=0{,}1034$ $\boxed{\cos\alpha=0{,}1034}$

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En cierta ciudad se estima que la temperatura máxima de cada día, en el mes de junio, sigue una distribución normal de media 30ºC y varianza 25. Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un día cualquiera del mes la temperatura máxima esté entre 28ºC y 32ºC.

b) (1 punto) Calcular el numero esperado de días del mes con máximo superior a 36^{0}C.

c) (0.75 puntos) Determinar la temperatura máxima alcanzada el día 10 de junio, sabiendo que dicha temperatura fue superada exactamente el 50% de los días del mes.

$N(\mu,\sigma)=N(30,5)$

$\sigma=\sqrt{\text{Varianza}}=\sqrt{25}=5$

a) $P(28<x<32)=P\left(\dfrac{28-30}{5}\le z\le\dfrac{32-30}{5}\right)=P(-0{,}4\le z\le 0{,}4)=P(z\le 0{,}4)-P(z\le -0{,}4)=$

$=P(z\le 0{,}4)-[1-P(z\le 0{,}4)]=2P(z\le 0{,}4)-1=2\cdot 0{,}6554-1=0{,}3108$ $\boxed{P(28<x<32)=0{,}3108}$

b) $P(x>36)=P\left(z\ge\dfrac{36-30}{5}\right)=P(z\ge 1{,}2)=1-P(z\le 1{,}2)=1-0{,}8849=0{,}1151$

11,51% —— x

100% —— 30 días

$\boxed{\text{Cabe esperar que entre 3 y 4 días del mes se superen los } 36^0\text{C}}$

c) $P(x\ge a)=P\left(z\ge\dfrac{a-30}{5}\right)=1-P\left(z\le\dfrac{a-30}{5}\right)=0{,}5 \Rightarrow \dfrac{a-30}{5}=0 \Rightarrow a=30^0$ $\boxed{a=30^0}$