UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso 2019-2020 Modelo
MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger una de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se valorará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

<u>OPCIÓN A</u>

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcule los valores de a y de b para que se verifique $A^2 = 2I$.

b) Para a = 0 y b = 2, determine la matriz X tal que $XA = B - X$.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real f(x) definida por $f(x)=\begin{cases} -x+a & x<-8 \\ \sqrt[3]{x} & -8\le x<1 \\ \ln x & x\ge 1 \end{cases}$

donde ln denota el logaritmo neperiano y a ∈ R. Se pide:

a) Proporcionar el valor del parámetro a para que la función anterior sea continua en el punto de abscisa x = −8 y analizar la continuidad de la función en el resto de los puntos de su dominio.

b) Obtener la recta tangente a la función en el punto x = e y estudiar el crecimiento/decrecimiento de esta recta. Justifique su respuesta.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Dada la curva $f(x) = x^2 + 4x - 5$

a) Halle el punto en el que la recta tangente a la curva es paralela a la recta $y - 6x + 1 = 0$, indicando su abscisa y ordenada.

b) Calcule el área del recinto acotado del plano limitado por la gráfica de f(x) y la curva $g(x) = -x^2+4x+3$.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

En una tienda en periodo de rebajas, el 80 % de las ventas son de ropa y el 20 % restante son complementos de moda. De las ventas que se realizan en la campaña, el 20 % de las ventas de ropa son devueltas, mientras que solo se devuelven el 10 % de los complementos. Si una de las ventas es elegida al azar, calcule la probabilidad de que la venta:

a) Sea una prenda de ropa y sea devuelta.

b) Sea devuelta.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
La cantidad de principio activo en las pastillas de una determinada marca de detergente puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ mg y varianza 0,09 mg^2.
a) Si una muestra aleatoria simple de 400 pastillas proporcionó una cantidad media de principio activo de 13 mg, halle un intervalo de confianza al 99 % para la media poblacional.
b) Determine el tamaño muestral mínimo para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor de 0,05 mg con un nivel de confianza del 98 %.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & m\\ 0 & 1 & 1\\ m-1 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$$

a) Proporcione el valor de m para que $A \cdot B = C^t$
b) Para m = 0 calcule B^{-1}.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+ay+z=6 \\ 2x-y+z=a-1 \\ -x+y+z=2 \end{cases}$
a) Discuta el sistema para los distintos valores de $a \in \mathbb{R}$.
b) Resuelva el sistema de ecuaciones para a = 2.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real definida por: $f(x)=\sqrt{2}\cdot x\cdot e^{-x^2}$
a) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$
b) Halle el área del recinto acotado del plano delimitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas x = −1 y x = 1.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se lanza un dado para decidir el número de veces que se lanza una moneda.
a) Obtenga la probabilidad de no observar ninguna cruz.
b) Dado que no se observó ninguna cruz, ¿cuál es la probabilidad de haber lanzado la moneda 2 veces?

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
En verano, en Madrid, se instalan puestos callejeros de venta de melones y sandías. Se sabe que el peso de las sandías puede aproximarse por una variable con distribución normal de media μ y desviación típica σ = 450g.
a) Si se toma una muestra de 25 sandías y se obtiene una media muestral de $\bar{x}=2700g$, calcule un intervalo de confianza al 95 % para la media poblacional.
b) Si el peso medio de las sandías es μ = 3000g, calcule la probabilidad de que una muestra de cuatro sandías cogidas al azar pese en media entre 3000g y 3450g.

SOLUCIONES:

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcule los valores de a y de b para que se verifique $A^2 = 2I$.
b) Para a = 0 y b = 2, determine la matriz X tal que XA = B − X.

a) $A^2=\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+b & a+2 \\ ab+2b & b+4 \end{pmatrix}$

$$A^2=2I \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2+b & a+2 \\ ab+2b & b+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b=2 \\ a+2=0 \Rightarrow a=-2 \\ ab+2b=0 \\ b+4=2 \Rightarrow b=-2 \end{cases}$$

$\boxed{a=-2,\ b=-2}$

b) $X\cdot A=B-X \Rightarrow X\cdot A+X=B \Rightarrow X(A+I)=B \Rightarrow X(A+I)(A+I)^{-1}=B(A+I)^{-1} \Rightarrow X=B\cdot(A+I)^{-1}$

$$A+I=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj(A+I)=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left[Adj(A+I)\right]^t=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A+I|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=3-2=1 \Rightarrow (A+I)^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X=B\cdot(A+I)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{X=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real f(x) definida por $f(x)=\begin{cases} -x+a & x<-8 \\ \sqrt[3]{x} & -8\le x<1 \\ \ln x & x\ge 1 \end{cases}$

donde ln denota el logaritmo neperiano y a ∈ R. Se pide:
a) Proporcionar el valor del parámetro a para que la función anterior sea continua en el punto de abscisa x = −8 y analizar la continuidad de la función en el resto de los puntos de su dominio.
b) Obtener la recta tangente a la función en el punto x=e y estudiar el crecimiento/decrecimiento de esta recta. Justifique su respuesta.

a) Continuidad en x=-8:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -8^-} -x+a=-8+a \\ \lim\limits_{x\to -8^+} \sqrt[3]{-8}=-2 \end{array}\right\} -8+a=-2 \Rightarrow \boxed{a=-10}$$

- En $(-\infty,-8)$ $f(x)$ es continua por ser un polinomio
- En $(-8,1)$ $f(x)$ es continua por ser una funcional irracional impar
- En $[1,+\infty)$ $f(x)$ es continua por ser $x>0$
- En $x=-8$ es continua si $a=-10$.
- En $x=1$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+} \ln x=\ln 1=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} \sqrt[3]{x}=1\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \Rightarrow$$

En x=1 presenta una discontinuidad inevitable de salto finito. $\boxed{f(x) \text{ es continua } \mathbb{R}-\{1\}}$

b) La ecuación de la recta tangente es: $y-y_0=m(x-x_0)$, donde $y_0=f(e)$ y $m=f'(e)$:

$$y_0=f(e)=\ln e=1$$

$$f'(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow m=f'(e)=\frac{1}{e}$$

Por lo que la recta tangente es: $y-1=\frac{1}{e}(x-e) \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{e}x}$

$\boxed{\text{La recta es creciente ya que su pendiente es positiva.}}$

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Dada la curva f(x) = $x^2 + 4x - 5$
a) Halle el punto en el que la recta tangente a la curva es paralela a la recta y −6x + 1 = 0, indicando su abscisa y ordenada.
b) Calcule el área del recinto acotado del plano limitado por la gráfica de f(x) y la curva g(x) = $-x^2+4x+3$.

a) $y=6x-1 \Rightarrow m=6$

$$\left.\begin{array}{l} m=f'(x_0) \Rightarrow 2x_0+4=6 \Rightarrow x_0=1 \\ y_0=f(x_0)=f(1)=1+4-5=0 \end{array}\right\} \text{Luego el punto buscado es: } \boxed{P(1,0)}$$

b) Calculamos los límites de la integral igualando las dos funciones:

$$x^2+4x-5=-x^2+4x+3 \Rightarrow 2x^2=8 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$$

Para ver la función que queda por arriba sustituimos un valor entre -2 y 2 en las dos funciones y la que tenga la imagen mayor será la que está por encima:

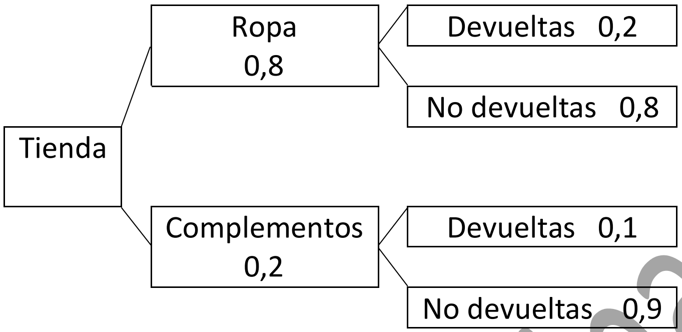
$$f(0)=0^2+4\cdot 0-5=-5 \qquad g(0)=-0^2+4\cdot 0+3=3$$

$$\int_{-2}^{2}(-x^2+4x+3)-(x^2+4x-5)dx=\int_{-2}^{2}(-2x^2+8)dx=\left[\frac{-2x^3}{3}+8x\right]_{-2}^{2}=$$

$$=\left(\frac{-2\cdot 2^3}{3}+8\cdot 2\right)-\left(\frac{-2\cdot(-2)^3}{3}+8\cdot(-2)\right)=\frac{64}{3}\ u^2 \qquad \boxed{A=\frac{64}{3}\ u^2}$$

academia@abitaulapinar.com
www.abitaulapinar.com
C/ Jazmín, 29 (Pinar de Chamartín)
91.056.80.48 / 622.92.94.25

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
En una tienda en periodo de rebajas, el 80 % de las ventas son de ropa y el 20 % restante son complementos de moda. De las ventas que se realizan en la campaña, el 20 % de las ventas de ropa son devueltas, mientras que solo se devuelven el 10 % de los complementos. Si una de las ventas es elegida al azar, calcule la probabilidad de que la venta:
a) Sea una prenda de ropa y sea devuelta.
b) Sea devuelta.



a) $P(R\cap D)=P(D/R)\cdot P(R)=0{,}8\cdot 0{,}2=0{,}16$ $\boxed{P(R\cap D)=0{,}16}$

b) $P(D)=P(D/R)\cdot P(R)\cup P(D/C)\cdot P(C)=0{,}2\cdot 0{,}8+0{,}2\cdot 0{,}1=0{,}18$ $\boxed{P(D)=0{,}18}$

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
En verano, en Madrid, se instalan puestos callejeros de venta de melones y sandías. Se sabe que el peso de las sandías puede aproximarse por una variable con distribución normal de media μ y desviación típica σ = 450g.
a) Si se toma una muestra de 25 sandías y se obtiene una media muestral de $\bar{x}=2700\text{g}$, calcule un intervalo de confianza al 95 % para la media poblacional.
b) Si el peso medio de las sandías es μ = 3000g, calcule la probabilidad de que una muestra de cuatro sandías cogidas al azar pese en media entre 3000g y 3450g.

a) n=400, $\sigma=\sqrt{\text{Varianza}}=\sqrt{0{,}09}=0{,}3$, $1-\alpha=0{,}99$, $N(\mu,\ 0{,}3)$

$$1-\alpha=0{,}99\ \Rightarrow\ \alpha=0{,}01\ \Rightarrow\ \alpha/2=0{,}005\ \Rightarrow\ 1-\alpha/2=0{,}995\ \Rightarrow\ z_{\alpha/2}=2{,}575$$

$$I.C:\left(\bar{X}\pm z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\left(13\pm 2{,}575\cdot\frac{0{,}3}{\sqrt{400}}\right)=(12{,}9614,\ 13{,}0386)\ \boxed{I.C:(12{,}9613,\ 13{,}0386)}$$

b) $1-\alpha=0{,}98\ \Rightarrow\ \alpha=0{,}02\ \Rightarrow\ \alpha/2=0{,}01\ \Rightarrow\ 1-\alpha/2=0{,}99\ \Rightarrow\ z_{\alpha/2}=2{,}325$

$$E\le z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \Rightarrow\ n\ge\left(\frac{z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2\ \Rightarrow\ n\ge\left(\frac{2{,}325\cdot 03}{0{,}05}\right)^2\ge 194{,}6\ \boxed{n=195}$$

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&0&m\\0&1&1\\m-1&0&1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}3&1\\0&2\\4&3\end{pmatrix}$$

a) Proporcione el valor de m para que $A\cdot B = C^t$
b) Para m = 0 calcule B^{-1}.

a) $$A\cdot B=C^t \Rightarrow \begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&m\\0&1&1\\m-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&4\\1&2&3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}1+2m-2=3 \Rightarrow m=2\\ m+2=4 \Rightarrow m=2\\ m-1=1 \Rightarrow m=2\end{cases}\quad \boxed{m=2}$$

b) $$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow |B|=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&1\\-1&0&1\end{vmatrix}=1$$

$$\mathrm{Adj}(B)=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \mathrm{Adj}(B)^t=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}\mathrm{Adj}(B)^t=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}\qquad \boxed{B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}}$$

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases}x+ay+z=6\\2x-y+z=a-1\\-x+y+z=2\end{cases}$

a) Discuta el sistema para los distintos valores de a ∈ R.
b) Resuelva el sistema de ecuaciones para a = 2.

a) $$A=\begin{pmatrix}1&a&1\\2&-1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1&a&1&6\\2&-1&1&a-1\\-1&1&1&2\end{array}\right)$$

$$|A|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}1&a&1\\2&-1&1\\-1&1&1\end{vmatrix}=-1+2-a-1-1-2a=0 \Rightarrow -3a-1=0 \Rightarrow a=\frac{-1}{3}$$

$$\boxed{\text{Si } a\neq\frac{-1}{3} \Rightarrow |A|\neq 0 \Rightarrow \mathrm{Rg}A=\mathrm{Rg}A^*=\text{nº incógnitas} \Rightarrow \text{S.C.D.}}$$

Si $a = \frac{-1}{3}$:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & -4/3 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 : F_3 + F_1]{F_2 : F_2 - 2F_1} A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 1 & 6 \\ 0 & -1/3 & -1 & -40/3 \\ 0 & 2/3 & 2 & 8 \end{array}\right) = \frac{1}{3}\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 3 & 18 \\ 0 & -1 & -3 & -40 \\ 0 & 2 & 6 & 24 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 : F_3 + 2F_2} \frac{1}{3}\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 3 & 18 \\ 0 & -1 & -3 & -40 \\ 0 & 0 & 0 & -56 \end{array}\right)$$

$0x + 0y + 0z = -56$ Sistema incompatible. $\boxed{\text{Si } a = \frac{-1}{3} \text{ S.I.}}$

b) $\begin{cases} x + 2y + z = 6 \\ 2x - y + z = 1 \\ -x + y + z = 2 \end{cases}$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 : F_3 + F_1]{F_2 : F_2 - 2F_1} A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -5 & -1 & -11 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 : F_3 + 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -5 & -1 & -11 \\ 0 & -7 & 0 & -14 \end{array}\right)$$

$\begin{cases} x + 2y + z = 6 \\ \quad -5y - z = -11 \\ \quad -7y = -14 \end{cases}$ Resolviendo el sistema: $\begin{cases} -7y = -14 \Rightarrow y = 2 \\ -5y - z = -11 \Rightarrow -10 - z = -11 \Rightarrow z = 1 \\ x + 2y + z = 6 \Rightarrow x + 4 + 1 = 6 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$

$$\boxed{x = 1, \;\; y = 2, \;\; z = 1.}$$

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = \sqrt{2} \cdot x \cdot e^{-x^2}$

a) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b) Halle el área del recinto acotado del plano delimitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas x = −1 y x = 1.

a) El dominio de $f(x) = \sqrt{2} \cdot x \cdot e^{-x^2}$ son todos los reales puesto que la exponencial está elevada aun polinomio.

$f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{2} \cdot e^{-x^2} + \sqrt{2} \cdot x(-2x) \cdot e^{-x^2} = 0 \Rightarrow e^{-x^2}\left(\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \cdot x^2\right) = 0$

$\begin{cases} \sqrt{2} - 2\sqrt{2} \cdot x^2 = 0 \Rightarrow 2\sqrt{2} \cdot x^2 = \sqrt{2} \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 1/2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}/2 \\ e^{-x^2} = 0 \Rightarrow -x^2 = \ln 0 \Rightarrow \text{No tiene solución.} \end{cases}$

$f'(-3) < 0$ $\quad$ $f'(0) > 0$ $\quad$ $f'(4) < 0$

$-\sqrt{2}/2$ $\quad$ $+\sqrt{2}/2$

Por tanto, f es decreciente en $\left(-\infty,-\sqrt{2}/2\right)\cup\left(+\sqrt{2}/2,+\infty\right)$ y creciente en $\left(-\sqrt{2}/2,+\sqrt{2}/2\right)$

$$\lim_{x\to -\infty} \sqrt{2}\cdot x\cdot e^{-x^2} = -\infty\cdot e^{-\infty} = -\infty\cdot 0 \text{ Indeterminación}$$

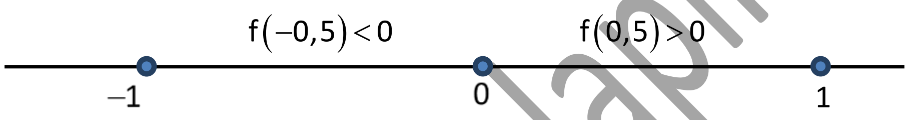
$$\lim_{x\to -\infty} \sqrt{2}\cdot x\cdot e^{-x^2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{2}\cdot x}{e^{x^2}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ Aplicamos L´Hôpital:}$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{2}\cdot x}{e^{x^2}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{2}}{2xe^{x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\infty} = 0$$

b) Hay que comprobar si la función corta al eje de abscisas entre x=-1 y x=1:

$$f(x)=0 \Rightarrow \sqrt{2}\cdot x\cdot e^{-x^2}=0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}\cdot x = 0 \Rightarrow x=0 \\ e^{-x^2}=0 \Rightarrow \text{No solución} \end{cases}$$

Vamos a ver el signo de la función:



Tendremos que calcular el área en dos partes: $\int_{-1}^{0} -\left(\sqrt{2}\cdot x\cdot e^{-x^2}\right) dx + \int_{0}^{1} \left(\sqrt{2}\cdot x\cdot e^{-x^2}\right) dx$

$$\int_{-1}^{0} -\left(\sqrt{2}\cdot x\cdot e^{-x^2}\right) dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\int\left(-2\cdot x\cdot e^{-x^2}\right) dx = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-x^2}\right]_{-1}^{0} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right) u^2$$

$$\int_{0}^{1} \left(\sqrt{2}\cdot x\cdot e^{-x^2}\right) dx = \frac{\sqrt{2}}{-2}\int_{0}^{1}\left(-2\cdot x\cdot e^{-x^2}\right) dx = \left[\frac{\sqrt{2}}{-2}e^{-x^2}\right]_{0}^{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right) u^2$$

$$\int_{-1}^{0} -\left(\sqrt{2}\cdot x\cdot e^{-x^2}\right) dx + \int_{0}^{1} \left(\sqrt{2}\cdot x\cdot e^{-x^2}\right) dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right) u^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right) u^2 = \sqrt{2}\left(1-\frac{1}{e}\right) u^2$$

$$\boxed{A = \sqrt{2}\left(1-\frac{1}{e}\right) u^2}$$

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se lanza un dado para decidir el número de veces que se lanza una moneda.
a) Obtenga la probabilidad de no observar ninguna cruz.
b) Dado que no se observó ninguna cruz, ¿cuál es la probabilidad de haber lanzado la moneda 2 veces?

a) Sabemos al lanzar la moneda: $P(\text{cara})=\frac{1}{2}$ y $P(\text{cruz})=\frac{1}{2}$

Casos que tenemos:

• Lanzar el dado y que salga el 1, por lo que lanzo la moneda una vez y que no me salga cara:

$$P(1\cap \text{cruz})=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$$

• Lanzar el dado y que salga el 2, por lo que lanzo la moneda dos veces y que no me salga cara:

$$P(1\cap \text{cruz}\cap \text{cruz})=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{24}$$

• Lanzar el dado y que salga el 3, por lo que lanzo la moneda tres veces y que no me salga cara:

$$P(1\cap \text{cruz}\cap \text{cruz}\cap \text{cruz})=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{48}$$

• Lanzar el dado y que salga el 4, por lo que lanzo la moneda cuatro veces y que no me salga cara:

$$P=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{96}$$

• Lanzar el dado y que salga el 5, por lo que lanzo la moneda cinco veces y que no me salga cara:

$$P=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{192}$$

• Lanzar el dado y que salga el 6, por lo que lanzo la moneda seis veces y que no me salga cara:

$$P=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{384}$$

Luego la probabilidad pedida es: $P=\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{96}+\frac{1}{192}+\frac{1}{384}=0{,}164$

b) $P(2/\text{cara})=\frac{P(2\cap \text{cara})}{P(\text{cara})}=\frac{1/24}{0{,}164}=0{,}2541$ $\boxed{P(2/\text{cara})=0{,}2541}$

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
En verano, en Madrid, se instalan puestos callejeros de venta de melones y sandías. Se sabe que el peso de las sandías puede aproximarse por una variable con distribución normal de media μ y desviación típica σ = 450g.
a) Si se toma una muestra de 25 sandías y se obtiene una media muestral de $\overline{x}=2700\text{g}$, calcule un intervalo de confianza al 95 % para la media poblacional.
b) Si el peso medio de las sandías es μ = 3000g, calcule la probabilidad de que una muestra de cuatro sandías cogidas al azar pese en media entre 3000g y 3450g.

a) $N(\mu, 450)$ $n=25,\ \overline{X}=2700,\ 1-\alpha=0,95$

$$1-\alpha=0,95 \Rightarrow \alpha=0,05 \Rightarrow \alpha/2=0,025 \Rightarrow 1-\alpha/2=0,975 \Rightarrow z_{\alpha/2}=1,96$$

$$\text{I.C.}:\left(\overline{X}\pm Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\left(2700\pm1,96\cdot\frac{450}{\sqrt{25}}\right)=(2523,6,\ 2876,4)\quad \boxed{\text{I.C.}:(2523,6,\ 2876,4)}$$

b) μ = 3000, $N(3000, 450)$

Para 4 sandías: $\left(3000,\dfrac{450}{\sqrt{4}}\right)$

$$P(3000<\overline{X}<3450)=P\left(\frac{3000-3000}{225}<z<\frac{3450-3000}{225}\right)=P(0<z<2)=$$

$$=P(0<z<2)=P(z<2)-P(z<0)=0,9772-0,5=0,4772\quad \boxed{P=0,4772}$$

academia@abitaulapinar.com
www.abitaulapinar.com

abitaulapinar.com

C/ Jazmín, 29 (Pinar de Chamartín)
91.056.80.48 / 622.92.94.25