PROPIEDADES Y TIPOS DE MATRICES

Suma de matrices:

$$A+B=B+A$$
$$A+(B+C)=(A+B)+C$$
$$\left.\begin{array}{l} A+0=A \\ A+(-A)=0 \end{array}\right\}\text{Donde 0 es la matriz nula.}$$

Multiplicación de un escalar por una matriz:

$$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$$
$$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$$
$$\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$$

Multiplicación de matrices:

$$A(B+C)=AB+AC$$
$$(A+B)C=AC+BC$$
$$A(BC)=(AB)C$$
$$\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)$$
$$A0_n=0_nA=0_n$$
$$BI_n=I_nB=B$$

En general $AB\neq BA$

$$AB=0 \not\Rightarrow A=0 \text{ ó } B=0$$
$$AB=AC \not\Rightarrow B=C$$

Propiedades de las trazas:

$$tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$$
$$tr(AB)=tr(BA)$$
$$tr(\alpha A)=\alpha\cdot tr(A)$$
$$tr(A^t)=tr(A)$$

Propiedades de matrices diagonales:

Si A y B son matrices diagonales

$$A+B=diag(a_{11}+b_{11},a_{22}+b_{22},\dots,a_{nn}+b_{nn})$$
$$A\cdot B=diag(a_{11}\cdot b_{11},a_{22}\cdot b_{22},\dots,a_{nn}\cdot b_{nn}) \quad \alpha\cdot a=diag(\alpha\cdot a_{11},\alpha\cdot a_{22},\dots,\alpha\cdot a_{nn})$$

Propiedades de la inversa:

$$(A^{-1})^{-1}=A$$
$$(AB)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$$
$$(\alpha A)^{-1}=\frac{1}{\alpha}\cdot A^{-1} \quad \forall\alpha\neq 0$$
$$(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n$$
$$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$$

A^{-1} es única $\qquad A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}(Adj\ A)^T$

Propiedades de la traspuesta:

$$\left(A^T\right)^T = A$$
$$\left(A+B\right)^T = A^T + B^T$$
$$\left(A\cdot B\right)^T = B^T \cdot A^T$$
$$\left(\alpha\cdot A\right)^T = \alpha\cdot A^T$$

Propiedades de la conjugada:

$$\left(\overline{\overline{A}}\right) = A$$
$$\overline{\left(A+B\right)} = \overline{A} + \overline{B}$$
$$\overline{\left(A\cdot B\right)} = \overline{A}\cdot\overline{B}$$
$$\overline{\left(\alpha\cdot A\right)} = \overline{\alpha}\cdot\overline{A}$$

Tipos de matrices:

- Cuadrada: Tiene igual número de filas y columnas.
- Rectangular: No coinciden número de filas y columnas.
- Fila: Tiene una fila y un número finito de columnas.
- Columna: Tiene una columna y un número finito de filas.
- Nula: Todos sus elementos son ceros.
- Opuesta (-A): Se obtiene cambiando de signo a $\forall$ los elementos.
- Triangular inferior: Matriz cuadrada donde $\forall$ los elementos de encima de la diagonal principal son ceros.
- Triangular superior: Matriz cuadrada donde $\forall$ los elementos por debajo de la diagonal principal son ceros.
- Diagonal: Matriz cuadrada donde $\forall$ los elementos por encima y por debajo de la diagonal principal son ceros.
- Escalar: Matriz diagonal con $\forall$ los elementos de la diagonal principal iguales.
- Unidad: Matriz escalar donde $\forall$ los elementos de la diagonal principal son unos.
- Traspuesta: Se obtiene intercambiando en la que nos dan las filas por las columnas.
- Simétrica: Los elementos conjugados son iguales. $a_{ij} = a_{ji}$. Cumple que $A^T = A$

  Si A es un matriz cuadrada y $B = A + A^T \Rightarrow B$ es simétrica.
  Si A es simétrica y $p \in \mathbb{R} \Rightarrow p\cdot A$ es simétrica
- Antisimétrica o hemisimétrica: Los elementos de la diagonal principal son ceros y los elementos conjugados son ceros. $a_{ii} = 0$, $a_{ij} = -a_{ji}$. Cumple que $A^T = -A$

  Si A es un matriz cuadrada y $C = A - A^T \Rightarrow C$ es antisimétrica.
  Si A es antisimétrica y $p \in \mathbb{R} \Rightarrow p\cdot A$ es antisimétrica

Una matriz cuadrada como suma de una simétrica y otra antisimétrica:

$$A = \left(A + A^T\right)/2 + \left(A - A^T\right)/2$$

- Regular o invertible: Matriz que tiene inversa: $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I$ Cumple que $|M| \neq 0$
- Singular: La que no tiene inversa. Su determinante vale cero. $|M| = 0$
- Idempotente: $A^2 = A$
- Nilpotente de orden n: $A^n = (0)$
- Ortogonal: $A^T = A^{-1} \Rightarrow A\cdot A^T = I$
- Cíclica de orden h: $A^h = I$