GEOMETRÍA EN EL PLANO

PUNTOS

Condición para que 3 puntos estén alineados.

Dados tres puntos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$, estarán alineados cuando los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ tengan la misma dirección, esto ocurre cuando son proporcionales.

$$\boxed{\frac{x_B - x_A}{x_C - x_B} = \frac{y_B - y_A}{y_C - y_B}}$$

Punto medio de un segmento.

Dados dos puntos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ se calcula el punto medio (M): $\boxed{M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)}$

VECTORES

Módulo de un vector: Dado el vector: $\vec{v} = (v_x, v_y)$ definimos su módulo como: $\boxed{|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$

Producto escalar: Dado los vectores $\vec{u} = (u_x, u_y)$ y $\vec{v} = (v_x, v_y)$

Podemos calcular el producto escalar de ellos de dos formas: $\boxed{\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \widehat{\vec{u}\vec{v}} \end{cases}}$

Coseno del ángulo de 2 vectores:

Despejando de la fórmula anterior obtenemos: $\boxed{\cos(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}}$

ECUACIONES DE LA RECTA.

Dado un punto de la recta: (p_x, p_y) y un vector: (v_x, v_y)

Ecuación vectorial: $\boxed{\vec{r} = (p_x, p_y) + k(v_x, v_y)}$

Ecuaciones paramétricas:

Se obtiene a partir de la vectorial expresando las variables por separado: $\boxed{\begin{matrix} x = p_x + kv_x \\ y = p_y + kv_y \end{matrix}}$

Ecuación continua de la recta:

Si en las ecuaciones paramétricas despejamos la k y las igualamos obtenemos la continua:

$$\left.\begin{matrix} x = p_x + kv_x \Rightarrow k = \dfrac{x - p_x}{v_x} \\ y = p_y + kv_y \Rightarrow k = \dfrac{y - p_y}{v_y} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{x - p_x}{v_x} = \frac{y - p_y}{v_y}}$$

Ecuación implícita o general:

Si multiplicamos en cruz en la ecuación continua tenemos: $\frac{x - p_x}{v_x} = \frac{y - p_y}{v_y} \Rightarrow (x - p_x)v_y = (y - p_y)v_x$

Desarrollamos y pasamos todo al primer miembro: $xv_y - p_x v_y - yv_x + p_y v_x = 0$

Llamamos A a v_y, B a $-v_x$ y C a $p_y v_x - p_x v_y$ y tenemos: $\boxed{Ax + By + C = 0}$

Ecuación explícita de la recta r.

- Si conocemos la ecuación explícita se obtiene despejando la y de la ecuación implícita:

$$Ax + By + C = 0 \Rightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Llamamos m a $-\frac{A}{B}$ y n a $-\frac{C}{B}$. Obtenemos así: $\boxed{y = mx + n}$

Donde m es la pendiente y n es la ordenada en el origen.

- Si conocemos un punto y la pendiente, obtenemos la ecuación directamente: $\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$

SIMÉTRICO DE UN PUNTO RESPECTO DE OTRO.

Dado el punto $A(x,y)$, podemos calcular el punto simétrico de $A'(x',y')$ respecto al punto de simetría $P(\alpha,\beta)$:

$$\boxed{\alpha=\frac{x+x'}{2},\quad \beta=\frac{y+y'}{2}}$$

ANGULO ENTRE DOS RECTAS:

Si llamamos $\vec{v}=(v_x,v_y)$ al vector de una de las rectas y $\vec{v}'=(v'_x,v'_y)$ al vector de la otra recta, obtenemos el ángulo con la fórmula:

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{v_x\cdot v'_x+v_y\cdot v'_y}{|v|\cdot|v'|}}$$

RECTAS PARALELAS

- Si llamamos $\vec{v}=(v_x,v_y)$ al vector de una de las rectas y $\vec{v}'=(v'_x,v'_y)$ al vector de la otra recta se cumple que:

$$\boxed{\frac{v_x}{v'_x}=\frac{v_y}{v'_y}}$$

- Si lo que tenemos son las pendientes de las dos rectas, se cumple que: $\boxed{m=m'}$

RECTAS PERPENDICULARES

- Si llamamos $\vec{v}=(v_x,v_y)$ al vector de una de las rectas y $\vec{v}'=(v'_x,v'_y)$ al vector de la otra recta, sus vectores cumplen: $\boxed{(v'_x,v'_y)=(kv_y,-kv_x)}$

- Si lo que tenemos son las pendientes de las dos rectas, se cumple que: $\boxed{m'=-\frac{1}{m}}$

POSICIÓN RELATIVA DE RECTAS DADAS EN FORMA GENERAL:

Dadas las rectas: $r\equiv Ax+By+C=0$ y $s\equiv A'x+B'y+C'=0$

- Si $\boxed{\frac{A}{A'}\neq\frac{B}{B'}}$ las rectas se cortan.
- Si $\boxed{\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}\neq\frac{C}{C'}}$ las rectas son paralelas.
- Si $\boxed{\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}}$ Las rectas son coincidentes (las mismas)

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

La distancia entre dos puntos $P(P_x,P_y)$, $Q(Q_x,Q_y)$ es el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$:

$$\boxed{\text{dist}(P,Q)=|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{(Q_x-P_x)^2+(Q_y-P_y)^2}}$$

DISTANCIA ENTRE PUNTO Y RECTA

La distancia de un punto $P(a,b)$ a la recta $r: Ax+By+C=0$ es: $\boxed{\text{dist}(P,r)=\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}}$