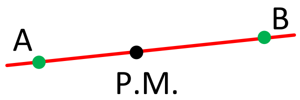
PUNTOS Y VECTORES

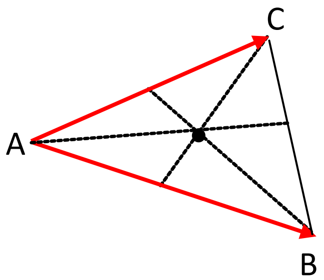
PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Dados dos puntos $A=(A_x,A_y,A_z)$ y $B=(B_x,B_y,B_z)$ el punto medio del segmento que los une se calcula:



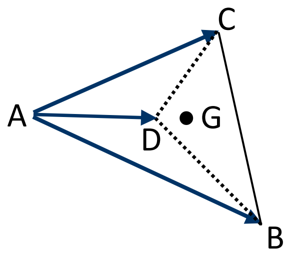
$$\boxed{P.M.=\left(\frac{A_x+B_x}{2},\frac{A_y+B_y}{2},\frac{A_z+B_z}{2}\right)}$$

COORDENADAS DEL BARICENTRO DE UN TRIÁNGULO



$$\boxed{B=\left(\frac{A_x+B_x+C_x}{3},\frac{A_y+B_y+C_y}{3},\frac{A_z+B_z+C_z}{3}\right)}$$

COORDENADAS DEL BARICENTRO DE UN TETRAEDRO



$$\boxed{G=\left(\frac{A_x+B_x+C_x+D_x}{4},\frac{A_y+B_y+C_y+D_y}{4},\frac{A_z+B_z+C_z+D_z}{4}\right)}$$

PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES

Dados $\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)$ y $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$ el producto escalar se calcula:

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=\begin{cases}(u_x,u_y,u_z)\cdot(v_x,v_y,v_z)=u_xv_x+u_yv_y+u_zv_z\\ |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\widehat{\vec{u}\,\vec{v}})\end{cases}}$$

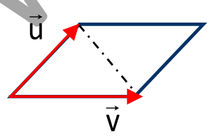
PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES

Dados $\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)$ y $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$ el producto vectorial se calcula:

$$\boxed{\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\u_x&u_y&u_z\\v_x&v_y&v_z\end{vmatrix}}$$

y su módulo: $\boxed{|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\operatorname{sen}(\widehat{\vec{u}\,\vec{v}})}$

Área de un paralelogramo: $\boxed{A=|\vec{u}\times\vec{v}|}$



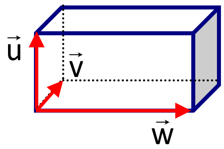
Área de un triángulo: $\boxed{A=\frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}|}$

PRODUCTO MIXTO DE TRES VECTORES

Dados $\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)$, $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$ y $\vec{w}=(w_x,w_y,w_z)$ el producto mixto se calcula:

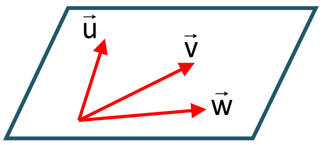
$$\boxed{[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix}u_x&u_y&u_z\\v_x&v_y&v_z\\w_x&w_y&w_z\end{vmatrix}}$$

academia@abitaulapinar.com
www.abitaulapinar.com
abitaulapinar.com
C/ Jazmín, 29 (Pinar de Chamartín)
91.056.80.48 / 622.92.94.25



Volumen del paralelepípedo: $\boxed{V=[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]}$

Volumen del tetraedro: $\boxed{V=\frac{1}{6}[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]}$

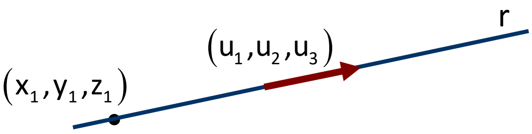


Condición para que cuatro puntos (tres vectores) sean coplanarios:

$$\boxed{V=[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=0}$$

RECTAS Y PLANOS

ECUACIONES DE LA RECTA



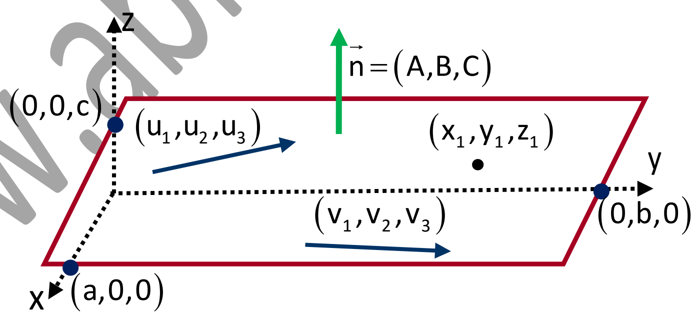
Vectorial: $\boxed{(x,y,z)=(x_1,y_1,z_1)+\lambda(u_1,u_2,u_3)}$

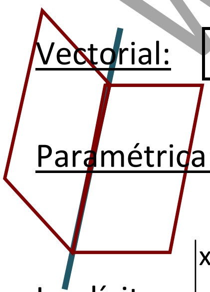
Paramétrica: $\boxed{\begin{cases} x=x_1+\lambda\cdot u_1 \\ y=y_1+\lambda\cdot u_2 \\ z=z_1+\lambda\cdot u_3 \end{cases}}$

Continua: $\boxed{\frac{x-x_1}{u_1}=\frac{y-y_1}{u_2}=\frac{z-z_1}{u_3}}$

Intersección de dos planos: $\boxed{\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}}$

ECUACIONES DEL PLANO





Vectorial: $\boxed{(x,y,z)=(x_1,y_1,z_1)+\lambda(u_1,u_2,u_3)+\mu(v_1,v_2,v_3)}$

Paramétrica: $\boxed{\begin{cases} x=x_1+\lambda\cdot u_1+\mu\cdot v_1 \\ y=y_1+\lambda\cdot u_2+\mu\cdot v_2 \\ z=z_1+\lambda\cdot u_3+\mu\cdot v_3 \end{cases}}$

Implícita: $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Ax+By+Cz+D=0}$

Segmentaria: $\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1}$

POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS

• SI TENGO LAS DOS RECTAS COMO INTERSECCIÓN DE DOS PLANOS:

$$r_1 \equiv \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \qquad r_2 \equiv \begin{cases} A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0 \\ A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0 \end{cases}$$

Planteamos dos matrices: $M=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{pmatrix}$ $\quad M^*=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \end{pmatrix}$

$Rg(M)$	$Rg(M^*)$	TIPO DE SISTEMA	POSICIÓN DE LAS RECTAS	CONDICIÓN QUE CUMPLEN
2	2	S.C.I.	Coincidentes	$\frac{u_1}{v_1}=\frac{u_2}{v_2}=\frac{u_3}{v_3}$
2	3	S.I.	Paralelas	
3	3	S.C.D.	Secantes	$\frac{u_1}{v_1}\neq\frac{u_2}{v_2}\neq\frac{u_3}{v_3}$
3	4	S.I.	Cruzan	

• SI CONSIGO ENCONTRAR EL PUNTO Y EL VECTOR DE CADA UNA DE ELLAS:

$$r_1 \equiv \begin{cases} \text{Pto } A=(x_1,y_1,z_1) \\ \vec{u}=(u_1,u_2,u_3) \end{cases} \qquad r_2 \equiv \begin{cases} \text{Pto } B=(x_2,y_2,z_2) \\ \vec{v}=(v_1,v_2,v_3) \end{cases}$$

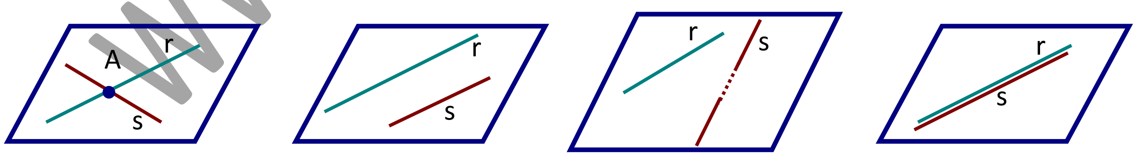
1. O bien planteamos dos matrices:

$$M=(\vec{u},\vec{v},)=\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \qquad M^*=(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB})=\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{pmatrix}$$

$Rg(M)$	$Rg(M^*)$	TIPO DE SISTEMA	POSICIÓN DE LAS RECTAS	CONDICIÓN QUE CUMPLEN
1	1	S.C.I.	Coincidentes	$\frac{u_1}{v_1}=\frac{u_2}{v_2}=\frac{u_3}{v_3}$
1	2	S.I.	Paralelas	
2	2	S.C.D.	Secantes	$\frac{u_1}{v_1}\neq\frac{u_2}{v_2}\neq\frac{u_3}{v_3}$
2	3	S.I.	Cruzan	

2. O bien pensamos:

Las rectas pueden tener 4 posiciones:



Secantes Paralelas Cruzan Coincidentes

• Si son coincidentes o paralelas los vectores deben ser proporcionales, es decir:

$$\frac{u_1}{v_1}=\frac{u_2}{v_2}=\frac{u_3}{v_3}$$

Para distinguir entre coincidentes y paralelas basta con pensar que si son coincidentes cualquier punto de una recta es un punto de la otra así que basta con coger un punto de una de ellas y sustituirlo en la otra, si cumple la condición serán coincidentes y si no la cumple, paralelas.

•En el caso de que los vectores no sean proporcionales, las rectas serán secantes o se cruzan.

$$\frac{u_1}{v_1} \neq \frac{u_2}{v_2} \neq \frac{u_3}{v_3}$$

Para distinguirlas, basta con pensar que si son secantes tendrán un punto en común, por tanto, resolvemos el sistema formado por las dos rectas, si tienen solución son secantes, y si el sistema no tiene solución se cruzarán en el espacio.

POSICIÓN RELATIVA DE DOS PLANOS

Tenemos dos planos de la forma:

$$\pi_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \qquad y \qquad \pi_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Planteamos dos matrices: $M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$

$Rg(M)$	$Rg(M^*)$	TIPO DE SISTEMA	POSICIÓN DE LAS RECTAS	CONDICIÓN QUE CUMPLEN
1	1	S.C.I.	Coincidentes	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$
1	2	S.I.	Paralelos	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$
2	2	S.C.I.	Se cortan en una recta	$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$

POSICIÓN RELATIVA DE TRES PLANOS

Tenemos los planos: $\pi_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\ \pi_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,\ \pi_3 \equiv A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$

Planteamos dos matrices: $M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$

$Rg(M)$	$Rg(M^*)$	TIPO DE SISTEMA	POSICIÓN DE LOS PLANOS
1	1	S.C.I.	Coincidentes
1	2	S.I.	3 planos paralelos 2 coincidentes y el otro paralelo
2	2	S.C.I.	3 planos secantes en una recta 2 coincidentes y uno secante
2	3	S.I.	3 planos secantes dos a dos 2 paralelos y el otro los corta
3	3	S.C.D.	3 planos secantes en un punto

POSICIÓN RELATIVA DE RECTA Y PLANO

• **SI TENGO LA RECTA COMO INTERSECCIÓN DE DOS PLANOS:**

Tenemos el plano: $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

Planteamos dos matrices: $M=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ $\quad M^*=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$

$Rg(M)$	$Rg(M^*)$	TIPO DE SISTEMA	POSICIÓN DE LAS RECTAS
2	2	S.C.I.	Recta contenida en plano
2	3	S.I.	Recta y plano paralelos
3	3	S.C.D.	Recta y plano secantes

● **SI TENGO EL VECTOR DE LA RECTA Y EL VECTOR NORMAL DEL PLANO:**

Del plano $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$ sacamos el vector normal: $\vec{n}=(A,B,C)$ y de la recta sacamos su vector $\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)$

- Si $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ y $A\cdot u_x+B\cdot u_y+C\cdot u_z+D=0$ la recta está contenida en el plano.
- Si $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ y $A\cdot u_x+B\cdot u_y+C\cdot u_z+D\neq 0$ la recta y el plano son paralelos.
- Si $\vec{n}\cdot\vec{u}\neq 0$ la recta y el plano se cortan en un punto.

DISTANCIAS

♣ Distancia de un punto a una recta: $\boxed{d(P,r)=\dfrac{\left|\overrightarrow{AP}\times\vec{u}\right|}{|\vec{u}|}}$

♣ Distancia de un punto a un plano: $\boxed{d(P,\pi)=\left|\dfrac{AP_x+BP_y+CP_z+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|}$

♣ Distancia entre dos planos:

- Si se cortan o coinciden: $\boxed{d(\pi_1,\pi_2)=0}$
- Si son paralelos tomo un punto cualquiera de uno de ellos y calculo la distancia de ese punto al otro plano:

$$\boxed{d(\pi_1,\pi_2)=d(P,\pi_2) \text{ siendo P un punto de } \pi_1}$$

♣ Distancia entre recta y plano:

- Si la recta está contenida en el plano: $\boxed{d(r,\pi)=0}$
- Si la recta es paralela al plano tomo un punto cualquiera de la recta y calculo la distancia de ese punto al plano:

$$\boxed{d(r,\pi)=d(P,\pi) \text{ siendo P un punto de r}}$$

♣ Distancia entre dos rectas:

- Si coinciden o se cortan: $\boxed{d(r_1,r_2)=0}$
- Si son paralelas tomo un punto cualquiera de una de las rectas y calculo la distancia de ese a la otra recta: $\boxed{d(r_1,r_2)=d(P,r_2) \text{ siendo P un punto de } r_1}$
- Si se cruzan: $\boxed{d(r_1,r_2)=\left|\dfrac{\left[\overrightarrow{AB}\times\vec{u}\times\vec{v}\right]}{|\vec{u}\times\vec{v}|}\right|}$

ÁNGULOS:

♣ Ángulo entre dos rectas: $$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

♣ Ángulo entre dos planos: $$\cos\alpha = \left|\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}\right|$$

♣ Ángulo entre recta y plano: $$\operatorname{sen}\alpha = \left|\frac{A\cdot u_x + B\cdot u_y + C\cdot u_z}{|\vec{u}|\cdot\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|$$