UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso 2020-2021 Modelo
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger una de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.
CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & x-1 \\ x+1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix} \text{ se pide:}$$

a) (0.5 puntos) Determinar los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales A tiene inversa.
b) (1 punto) Para x = −1, calcular la inversa de A.
c) (1 punto) Para x = 1, hallar $(AB^t)^3$ y $(AB^t)^{2020}$ (donde B^t denota la matriz traspuesta de B).

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sea la función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x+1} & \text{si } x\le 1,\ x\ne -1 \\ \dfrac{\ln x}{x-1} & \text{si } x>1 \end{cases}$$

a) (0.5 puntos) Estudie la continuidad de f en x = 1.
b) (1 punto) Halle las asíntotas de f, si existen.
c) (1 punto) Determine el valor de $x_0 < 1$ que verifica que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ tiene pendiente −1/2. Escriba la ecuación de dicha recta tangente.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Se consideran los puntos A (3, 1, 2), B (0, 3, 4) y P (−1, 1, 0). Se pide:
a) (0.75 puntos) Determinar las coordenadas de un punto Q sabiendo que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son linealmente dependientes, tienen sentidos opuestos y tienen el mismo módulo.
b) (1 punto) Determinar las coordenadas del punto de intersección de la recta r que contiene a A y P, y de la recta s que contiene a B y al punto C (2, −1, −2).
c) (0.75 puntos) Calcular el coseno del ángulo formado por $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$.

Ejercicio 4. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.
En un instituto, uno de cada cuatro alumnos practica baloncesto. Se eligen 6 alumnos al azar y se considera la variable aleatoria X que representa el número de estudiantes entre estos 6 que practican baloncesto. Se pide:
a) (1 punto) Identificar la distribución de la variable aleatoria X y calcular P (X = 0).
b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que al menos 5 de los 6 elegidos practiquen baloncesto.
c) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que al menos 1 de los 6 practique baloncesto

OPCIÓN B

Ejercicio 1. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.
Dados la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ a & -3 & a \\ a-1 & -3 & a \end{pmatrix}$ y el vector $B=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, determine el valor o valores de a:

a) (1.5 puntos) Para los que el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=B$ no tenga solución.

b) (1 punto) Para que $A = A^{-1}$.

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.
Dada la función $f(x)=x^6-4x^4$, se pide:
a) (0.5 puntos) Estudiar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
b) (1 punto) Encontrar sus máximos y mínimos relativos, y determinar si son o no absolutos.
c) (1 punto) Hallar el área de la región acotada limitada por el eje y = 0 y la gráfica de f.

Ejercicio 3. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.
Dadas las rectas $r\equiv\begin{cases} x+2z=1 \\ y+z=2 \end{cases}$, $s\equiv\begin{cases} x=-3+2\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}$, se pide:
a) (0.5 puntos) Hallar la distancia del origen a la recta s.
b) (0.5 puntos) Determinar la posición relativa de r y s.
c) (0.75 puntos) Escribir la ecuación del plano que contiene a la recta r y al vector perpendicular a r y a s.
d) (0.75 puntos) Escribir la ecuación de una recta perpendicular común a r y a s.

Ejercicio 4. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.
Una prueba diagnóstica para una enfermedad da resultado negativo el 5% de las veces que se aplica a un individuo que la padece y da resultado positivo el 10% de las veces que se aplica a un individuo que no la padece. Las estadísticas muestran que dicha enfermedad afecta a 50 de cada diez mil personas. Si una persona elegida al azar se somete a la prueba diagnóstica, calcule la probabilidad de:
a) (0.5 puntos) Que la prueba de resultado positivo.
b) (0.75 puntos) Que la persona padezca la enfermedad, si el resultado de la prueba ha sido positivo.
c) (0.75 puntos) Que la persona no padezca la enfermedad, si el resultado de la prueba ha sido negativo. d) (0.5 puntos) Que el resultado de la prueba diagnóstica sea erróneo.

SOLUCIONES:

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & x\\ 1 & 0 & x-1\\ x+1 & 0 & 3\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}0 & 1/3 & -1/3\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 2/3 & -2/3\end{pmatrix} \text{ se pide:}$$

a) (0.5 puntos) Determinar los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales A tiene inversa.

b) (1 punto) Para x = −1, calcular la inversa de A.

c) (1 punto) Para x = 1, hallar $\left(AB^t\right)^3$ y $\left(AB^t\right)^{2020}$ (donde B^t denota la matriz traspuesta de B).

a) La matriz A no posee inversa si su determinante se anula.

$$|A|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}0 & 1 & x\\ 1 & 0 & x-1\\ x+1 & 0 & 3\end{vmatrix}=0 \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2.$$

$\boxed{\text{A tiene inversa } \forall x \in R - \{\pm 2\}.}$

b) $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\left(A^{adj}\right)^t$

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix},\quad A^{adj}=\begin{pmatrix}0 & -3 & 0\\ -3 & 0 & 0\\ -2 & -1 & -1\end{pmatrix}\quad \left(A^{adj}\right)^t=\begin{pmatrix}0 & -3 & -2\\ -3 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$|A|=x^2-4$ Para $x=-1$ vale $|A|=-3$ Luego la inversa es: $\boxed{A^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & 3 & 2\\ 3 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}$

c) Si $x=1$ $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$ y $B^t=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1/3 & 1 & 2/3\\ -1/3 & 0 & -2/3\end{pmatrix}$

$$AB^t=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1/3 & 1 & 2/3\\ -1/3 & 0 & -2/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\left(AB^t\right)^2=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\left(AB^t\right)^3=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=-I \quad \boxed{\left(AB^t\right)^3=-I}$$

$$\left(AB^t\right)^{2020}=\left(AB^t\right)^{3\cdot 673}\cdot\left(AB^t\right)=-\left(AB^t\right)=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \boxed{\left(AB^t\right)^{2020}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}}$$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sea la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x+1} & \text{si } x\le 1,\ x\neq -1\\ \dfrac{\ln x}{x-1} & \text{si } x>1\end{cases}$$

a) (0.5 puntos) Estudie la continuidad de f en x = 1.
b) (1 punto) Halle las asíntotas de f, si existen.
c) (1 punto) Determine el valor de $x_0 < 1$ que verifica que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ tiene pendiente $-1/2$. Escriba la ecuación de dicha recta tangente.

a) Estudiamos la continuidad en el punto x = 1:

$$\left.\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2}{x+1}=1\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\ln x}{x-1}=\dfrac{0}{0}\ \Rightarrow\ L'H\ \Rightarrow\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1/x}{1}=1\end{array}\right\}\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1\\ \\ f(1)=1\end{array}\right\}\Rightarrow f(x) \text{ es continua en x=1}$$

b) Asíntota vertical puede haber en x=-1:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{2}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{2}{0^+}=+\infty\end{array}\right\}\boxed{\text{A.V. en } x=-1}$$

Asíntota horizontal:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2}{x+1}=0\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x-1}=\dfrac{\infty}{\infty}\ \Rightarrow\ L'H\ \Rightarrow\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1/x}{1}=0\end{array}\right\}\boxed{\text{A.H. en } y=0}$$

c) La pendiente de la tangente a la gráfica de f en (x0, f(x0)) vale -1/2:

$$f'(x)=\frac{-1}{2}\ \Rightarrow\ \frac{-2}{(x+1)^2}=\frac{-1}{2}\ \Rightarrow\ 4=(x+1)^2\ \Rightarrow\ \begin{cases}x+1=2\ \Rightarrow\ x=1\\ x+1=-2\ \Rightarrow\ x=-3\end{cases}$$

AL ser $x_0 < 1$, el punto buscado es $\boxed{x=-3}$
La recta tangente tiene la forma $y-y_0=m(x-x_0)$ donde $x_0=-3$ y m=-1/2. Calculamos y_0:

$$f(x)=\frac{2}{x+1}\ \Rightarrow\ y_0=f(-3)=\frac{2}{-3+1}=-1$$

Por lo que la recta tangente será: $y+1=\dfrac{-1}{2}(x+3)\ \Rightarrow \boxed{y=-\dfrac{x}{2}-\dfrac{5}{2}}$

<u>Ejercicio 3.</u> Calificación máxima: 2.5 puntos.
Se consideran los puntos A(3, 1, 2), B(0, 3, 4) y P(−1, 1, 0). Se pide:
a) (0.75 puntos) Determinar las coordenadas de un punto Q sabiendo que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son linealmente dependientes, tienen sentidos opuestos y tienen el mismo módulo.
b) (1 punto) Determinar las coordenadas del punto de intersección de la recta r que contiene a A y P, y de la recta s que contiene a B y al punto C(2, −1, −2).
c) (0.75 puntos) Calcular el coseno del ángulo formado por $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$.

a) $\overrightarrow{AB} = B - A = (0,3,4) - (3,1,2) = (-3,2,2)$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ} = Q - P = (x,y,z) - (-1,1,0) = (x+1, y-1, z)\\ \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{AB} = (3,-2,-2)\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 3 \Rightarrow x = 2 \\ y-1 = -2 \Rightarrow y = -1 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(2,-1,-2)}$$

b) Obteneos la recta r con el punto A y al vector $\overrightarrow{AP} = P - A = (-1,1,0) - (3,1,2) = (-4,0,-2)$

$$r: \begin{cases} x = -1 - 4\lambda \\ y = 1 \\ z = -2\lambda \end{cases}$$

Obteneos la recta S con el punto B y al vector $\overrightarrow{BC} = C - B = (2,-1,-2) - (0,3,4) = (2,-4,-6)$

$$S: \begin{cases} x = 0 + 2\beta \\ y = 3 - 4\beta \\ z = 4 - 6\beta \end{cases}$$

Resolvemos ahora el sistema formado por ambas rectas igualando las componentes x e y y luego comprobando esos valores en la z:

$$\left.\begin{array}{l} -1-4\lambda = 2\beta \\ 1 = 3 - 4\beta \end{array}\right\} \beta = \frac{1}{2}, \lambda = \frac{-1}{2}$$

Comprobamos en la componente z:

$$-2\lambda = 4 - 6\beta \Rightarrow -2\frac{-1}{2} = 4 - 6\frac{1}{2} \Rightarrow 1 = 1$$

El punto es: $r: \begin{cases} x = -1 - 4\lambda \Rightarrow x = -1 - 4\frac{-1}{2} = 1 \\ y = 1 \\ z = -2\lambda \Rightarrow z = -2\frac{-1}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{M(1,1,1)}$

c) $\overrightarrow{PA} = A - P = (3,1,2) - (-1,1,0) = (4,0,2)$, $\overrightarrow{PB} = B - P = (0,3,4) - (-1,1,0) = (1,2,4)$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PA}}{\left|\overrightarrow{PB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PA}\right|} = \frac{(1,2,4)\cdot(4,0,2)}{\sqrt{1^2+2^2+4^2}\cdot\sqrt{4^2+0^2+2^2}} = \frac{12}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{20}} = \frac{6\sqrt{105}}{105} = \frac{2\sqrt{105}}{35} \qquad \boxed{\cos\alpha = \frac{2\sqrt{105}}{35}}$$

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
En un instituto, uno de cada cuatro alumnos practica baloncesto. Se eligen 6 alumnos al azar y se considera la variable aleatoria X que representa el número de estudiantes entre estos 6 que practican baloncesto. Se pide:
a) (1 punto) Identificar la distribución de la variable aleatoria X y calcular P(X = 0).
b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que al menos 5 de los 6 elegidos practiquen baloncesto.
c) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que al menos 1 de los 6 practique baloncesto.

a) Se trata de una distribución binomial $\boxed{X \sim B(6,\ 0.25)}$

$$P(x=0)=\binom{6}{0}0{,}25^0\cdot 0{,}75^6=0{,}18 \quad \boxed{P(x=0)=0{,}18}$$

b) $P(x>4)=P(x=5)+P(x=6)=\binom{6}{5}0{,}25^5\cdot 0{,}75^1+\binom{6}{6}0{,}25^6\cdot 0{,}75^0=0{,}004638$

$$\boxed{P(x>4)=0{,}004638}$$

c) $P(x\geq 1)=1-P(x=0)=1-\binom{6}{0}0{,}25^0\cdot 0{,}75^6=0{,}82 \quad \boxed{P(x\geq 1)=0{,}82}$

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dados la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ a & -3 & a \\ a-1 & -3 & a \end{pmatrix}$ y el vector $B=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, determine el valor o valores de a:

a) (1.5 puntos) Para los que el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=B$ no tenga solución.

b) (1 punto) Para que $A = A^{-1}$.

a) Planteamos el sistema: $\begin{cases} y-z=0 \\ ax-3y+az=1 \\ (a-1)x-3y+az=2 \end{cases}$

Debe ser incompatible por lo que el rango de A debe ser menor que el de A*
Calculamos el determinante de A y lo igualamos a cero para ver los valores de a que hacen que el rango de A sea 2:

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ a & -3 & a \\ a-1 & -3 & a \end{vmatrix}=a(a-1)+3a-3(a-1)-a^2=3-a$$

$$|A|=0 \;\Rightarrow\; 3-a=0 \;\Rightarrow\; a=3$$

b) Dado que $A = A^{-1}$, si multiplicamos por A en ambos lados de la ecuación para quitarnos la inversa tenemos:

$$A \cdot A = A^{-1} \cdot A \;\Rightarrow\; A \cdot A = I \;\Rightarrow\; A^2 = I$$

Tomando determinantes: $\left|A^2\right| = |I| \;\Rightarrow\; |A|^2 = |I| \;\Rightarrow\; \begin{cases} |A| = 1 \;\Rightarrow\; 3 - a = 1 \;\Rightarrow\; a = 2 \\ |A| = -1 \;\Rightarrow\; 3 - a = -1 \;\Rightarrow\; a = 4 \end{cases}$

Comprobamos las dos soluciones para ver cuál es la válida:

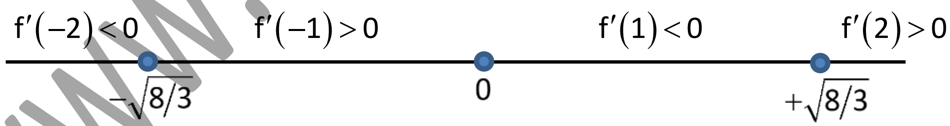
Para a=2: $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix} \neq I$

Para a=4: $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \quad \boxed{a = 4}$

<u>Ejercicio 2.</u> Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dada la función $f(x) = x^6 - 4x^4$, se pide:
a) (0.5 puntos) Estudiar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
b) (1 punto) Encontrar sus máximos y mínimos relativos, y determinar si son o no absolutos.
c) (1 punto) Hallar el área de la región acotada limitada por el eje y = 0 y la gráfica de f.

a) $f'(x) = 6x^5 - 16x^3$

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 6x^5 - 16x^3 = 0 \;\Rightarrow\; x^3\left(6x^2 - 16\right) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = 0 \\ 6x^2 - 16 = 0 \;\Rightarrow\; x = \pm\sqrt{8/3} \end{cases}$$



Por tanto, f es decreciente en $\left(-\infty, -\sqrt{8/3}\right) \cup \left(0, +\sqrt{8/3}\right)$ y creciente en $\left(-\sqrt{8/3}, 0\right) \cup \left(+\sqrt{8/3}, +\infty\right)$

b) La función tiene un máximo relativo en $(0,0)$ y dos mínimos relativos en $\left(-\sqrt{8/3}, \frac{-256}{27}\right)$, $\left(\sqrt{8/3}, \frac{-256}{27}\right)$. Además, f es continua y derivable en todo R, y $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$, por tanto, no tiene máximo absoluto, y los mínimos relativos también son mínimos absolutos.

c) El área pedida es $A = \int_{-2}^{2} \left(4x^4 - x^6\right) dx = \left[4\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\right]_{-2}^{2} = \frac{512}{35}\ u^2 \quad \boxed{A = \frac{512}{35}\ u^2}$

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x+2z=1 \\ y+z=2 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x=-3+2\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Hallar la distancia del origen a la recta s.
b) (0.5 puntos) Determinar la posición relativa de r y s.
c) (0.75 puntos) Escribir la ecuación del plano que contiene a la recta r y al vector perpendicular a r y a s.
d) (0.75 puntos) Escribir la ecuación de una recta perpendicular común a r y a s.

a) La recta s pasa por el punto $Q_s(-3,2,1)$ y tiene vector director $\overrightarrow{v_s}(2,-1,1)$.
La distancia de la recta al origen puede calcularse como:

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{v_s}\right|}{\left|\overrightarrow{v_s}\right|}=\frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{|(3,5,-1)|}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3^2+5^2+(-1)^2}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{210}}{6}\text{ u}$$

b) El vector director de la recta r es: $\overrightarrow{v_r}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(-2,-1,1)$

Y un punto de r es, por ejemplo, $P_r(1, 2, 0)$.

Las rectas tienen distinta dirección puesto que los vectores no son proporcionales:

$\frac{2}{-2}\neq\frac{-1}{-1}=\frac{1}{1}$ y por tanto se cruzarán o serán secantes.

Comprobamos si los vectores $\overrightarrow{P_rQ_s}$, $\overrightarrow{v_s}$ y $\overrightarrow{v_r}$ son linealmente independientes:

$\begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=4-2-2-4=-4\neq 0$, como son linealmente independientes, r y s se cruzan.

c) El plano buscado es el plano que pasa por P_r y tiene vectores directores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}$

$$\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(0,-4,-4)$$

Obtenemos la ecuación del plano:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv 8(x-1)-8(y-2)+8z=0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x-y+z+1=0}$$

d) Para hallar la perpendicular común basta escribirla como intersección del plano hallado en el apartado anterior y el plano que pasa por Q_s con vectores directores $\overrightarrow{v_s}$ y $\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}$.

$$\pi' \equiv \begin{vmatrix} x+3 & y-2 & z-1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv 8(x+3)+8(y-2)-8z=0 \Rightarrow \pi' \equiv x+y-z+2=0$$

De este modo obtenemos la recta solución: $\boxed{r \equiv \begin{cases} x-y+z+1=0 \\ x+y-z+2=0 \end{cases}}$

<u>Ejercicio 4.</u> Calificación máxima: 2.5 puntos.
Una prueba diagnóstica para una enfermedad da resultado negativo el 5% de las veces que se aplica a un individuo que la padece y da resultado positivo el 10% de las veces que se aplica a un individuo que no la padece. Las estadísticas muestran que dicha enfermedad afecta a 50 de cada diez mil personas. Si una persona elegida al azar se somete a la prueba diagnóstica, calcule la probabilidad de:
a) (0.5 puntos) Que la prueba de resultado positivo.
b) (0.75 puntos) Que la persona padezca la enfermedad, si el resultado de la prueba ha sido positivo.
c) (0.75 puntos) Que la persona no padezca la enfermedad, si el resultado de la prueba ha sido negativo. d) (0.5 puntos) Que el resultado de la prueba diagnóstica sea erróneo.

Sean:
E "padece la enfermedad"
P "resultado positivo en la prueba"
N "resultado negativo en la prueba".
Tenemos que $p(E)=0{,}005,\ p(P/E)=0{,}95,\ p(P/\bar{E})=0{,}1$

a) $p(P)=p(P/E)\cdot p(E)+p(P/\bar{E})\cdot p(\bar{E})=0{,}95\cdot 0{,}005+0{,}1\cdot 0{,}995=0{,}1042$ $\boxed{p(P)=0{,}1042}$

b) $p(E/P)=\dfrac{p(P/E)\cdot p(E)}{p(P/E)\cdot p(E)+p(P/\bar{E})\cdot p(\bar{E})}=\dfrac{0{,}95\cdot 0{,}005}{0{,}95\cdot 0{,}005+0{,}1\cdot 0{,}995}=0{,}0455$ $\boxed{p(E/P)=0{,}0455}$

c) $p(\bar{E}/N)=\dfrac{p(N/\bar{E})\cdot p(\bar{E})}{p(N)}=\dfrac{0{,}95\cdot 0{,}995}{1-0{,}1042}=0{,}9997$ $\boxed{p(\bar{E}/N)=0{,}9997}$

d) La probabilidad de que la prueba sea errónea es:

$$p(P\cap\bar{E})\cup p(N\cap E)=p(P/\bar{E})\cdot p(\bar{E})+p(N/E)\cdot p(E)=0{,}0997 \quad \boxed{p=0{,}0997}$$