UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso 2020-2021 Modelo
MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger una de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se valorará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se consideran las matrices A y B dadas por $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\a&1&0\\b&c&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}$

a) Determine los valores de los parámetros reales a, b y c para que se verifique $A^2 = A - B$.

b) Para a = b = c = 2, estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real f(x) definida por $f(x)=ax^2+bx+c$

a) Obtenga los coeficientes reales a, b y c, de f(x) sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa x = −3 y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto de abscisa x = 0 es y = 6x + 8.

b) Para a = 2, b = 1 y c = 1, calcule la integral $\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx$

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Dada la función $f(x)=x+\frac{4}{x^2}$

a) Halle el dominio de la función y sus asíntotas.

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y, si los hubiera, sus extremos relativos.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

En un mercado agropecuario el 70 % de las verduras que se comercializan son de proximidad y el resto no. El 30 % de las verduras de proximidad son ecológicas, mientras que de las que no son de proximidad, solo son ecológicas el 10 %. Si un cliente elegido al azar ha realizado una compra de una verdura, calcule las siguientes probabilidades:

a) Probabilidad de que la verdura comprada no sea ecológica.

b) Probabilidad de que la verdura sea de proximidad o ecológica.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

El número de kilómetros que un corredor entrena a la semana mientras prepara una carrera popular se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ horas y desviación típica σ = 10 horas.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 atletas, obteniéndose una media muestral de 30 kilómetros. Determine un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) Suponga que μ = 28 kilómetros. Calcule la probabilidad de que, al tomar una muestra aleatoria simple de 10 atletas, la media muestral, X, esté entre 28 y 30 kilómetros.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Un agricultor dispone de 5 hectáreas, como máximo, de terreno para dedicar a la plantación de trigo y cebada. Cada hectárea dedicada al trigo le supone un beneficio de 200 euros, mientras que cada hectárea dedicada a la cebada le supone un beneficio de 60 euros. Entre ambos cultivos es obligatorio plantar como mínimo una hectárea, y la normativa autonómica le obliga a que el cultivo de trigo ocupe como mucho una hectárea más que el de cebada. Represente la región factible, determine las hectáreas que debería dedicar a cada cultivo para maximizar sus beneficios y obtenga el valor del beneficio máximo.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x+y+z=2a-1 \\ 2x+y+az=1 \\ x+ay+z=1 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para a = 0.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax-\frac{1}{9} & \text{si } x\le 0 \\ \frac{x+1}{x^2-9} & \text{si } x>0 \end{cases}$$

a) Determine el dominio de f(x) y calcule el valor del parámetro a ∈ R para que f(x) sea derivable en todo su dominio.

b) Para a = 0 determine, si existen, las asíntotas de f(x).

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Sean C y D dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(C)=0{,}4$, $P(D)=0{,}6$, $P(C\cup D)=0{,}8$

Calcule:

a) $P(C/D)$.

b) $P(\overline{C\cap D}/C)$.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
Las calorías consumidas por un atleta durante una carrera popular se pueden aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ calorías y desviación típica σ = 300 calorías.
a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 100 calorías con un nivel de confianza del 95 %.
b) Suponga que μ = 3000 calorías. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño n = 50 atletas, la media de las calorías consumidas durante la carrera por los 50 atletas sea mayor que 2700 calorías.

SOLUCIONES:

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se consideran las matrices A y B dadas por:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\a&1&0\\b&c&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}$$

a) Determine los valores de los parámetros reales a, b y c para que se verifique $A^2 = A - B$.
b) Para a = b = c = 2, estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

Calculamos A^2 y A-B para luego igualarlas:

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\a&1&0\\b&c&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\a&1&0\\b&c&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2a&1&0\\2b+ac&2c&1\end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix}1&0&0\\a&1&0\\b&c&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\a-1&1&0\\b-1&c-1&1\end{pmatrix}$$

$$A^2=A-B\ \Rightarrow\ \begin{pmatrix}1&0&0\\2a&1&0\\2b+ac&2c&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\a-1&1&0\\b-1&c-1&1\end{pmatrix}$$

De donde:

$$2a=a-1\ \Rightarrow \boxed{a=-1}$$

$$2c=c-1\ \Rightarrow \boxed{c=-1}$$

$$2b+ac=b-1\ \Rightarrow\ 2b+1=b-1\ \Rightarrow \boxed{b=-2}$$

b) Con a = c = b = 2, se tiene que: $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\2&2&1\end{pmatrix}$

La inversa se calcula haciendo: $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\left(A^{adj}\right)^t$

El valor del determinante es: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$

La adjunta es $A^{adj} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y su traspuesta es: $\left(A^{adj}\right)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Por lo que $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real f(x) definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$

a) Obtenga los coeficientes reales a, b y c, de f(x) sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa x = −3 y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto de abscisa x = 0 es y = 6x + 8.

b) Para a = 2, b = 1 y c = 1, calcule la integral $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx$

a) En x = −3 hay extremo relativo luego $f'(-3) = 0$. Calculamos la derivada: $f'(x) = 2ax + b$

$$f'(-3) = 0 \Rightarrow \quad -6a + b = 0$$

La recta tangente en x = 0 es: y = 6x + 8. El punto de tangencia es por tanto el (0, 8), por tanto:

$$f(0) = 8 \Rightarrow \boxed{c = 8}$$

Además, la pendiente de la recta tangente es m = 6 luego:

$$m = f'(0) = 6 \Rightarrow \boxed{b = 6}$$

Calculamos a: $-6a + b = 0 \Rightarrow \quad -6a + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1}$

b) $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx = \int_1^e \frac{2x^2 + x + 1}{x} dx = \int_1^e \left(2x + 1 + \frac{1}{x}\right) dx = \left[\frac{-x^2}{2} + x + \ln x\right]_1^e = e^2 + e - 1 \quad \boxed{I = e^2 + e - 1}$

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Dada la función $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$

a) Halle el dominio de la función y sus asíntotas.
b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y, si los hubiera, sus extremos relativos.

a) El dominio de la función serán los reales menos los que anulen el denominador luego:

$$\boxed{\text{Dom } f(x):\ \mathbb{R} - \{0\}}$$

Asíntota vertical $\boxed{x=0}$:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x+\frac{4}{x^2}\right)=+\infty \qquad \lim_{x\to 0^-}\left(x+\frac{4}{x^2}\right)=+\infty$$

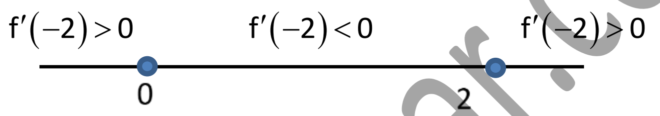
Asíntota horizontal no hay: $\lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{4}{x^2}\right)=\infty$

Asíntota oblicua en $\boxed{y=x}$:

$$m=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x^3}\right)=1 \qquad n=\lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{4}{x^2}-x\right)=n=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}=0$$

b) Para obtener los extremos igualamos a cero la primera derivada: $f'(x)=1-\frac{8}{x^3}$

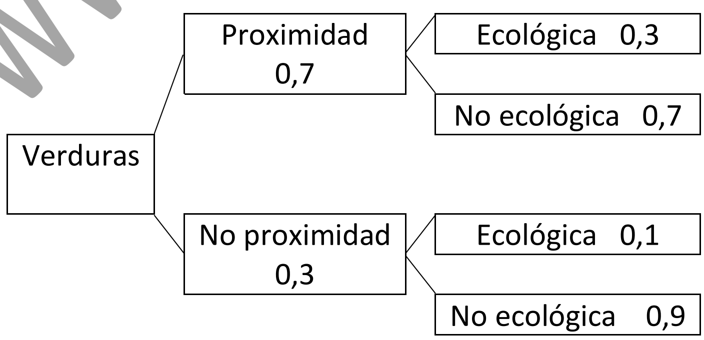
$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; 1-\frac{8}{x^3}=0 \;\Rightarrow\; x^3-8=0 \;\Rightarrow\; x=2$$



En los intervalos (−∞, 0) y (2, ∞) la derivada es positiva y por tanto la función creciente.
En el intervalo (0, 2) la derivada es negativa y por tanto la función decreciente.
Por tanto, hay un mínimo local en $(2,3)$

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
En un mercado agropecuario el 70 % de las verduras que se comercializan son de proximidad y el resto no. El 30 % de las verduras de proximidad son ecológicas, mientras que de las que no son de proximidad, solo son ecológicas el 10 %. Si un cliente elegido al azar ha realizado una compra de una verdura, calcule las siguientes probabilidades:
a) Probabilidad de que la verdura comprada no sea ecológica.
b) Probabilidad de que la verdura sea de proximidad o ecológica.

Definimos los sucesos P: Proximidad, E: Ecológica.
Sabemos: $P(P)=0{,}7,\; P(\bar{P})=0{,}3,\; P(E/P)=0{,}3,\; P(E/\bar{P})=0{,}1$



a) $P(E)=P(E/P)\cdot P(P)+P(E/\bar{P})\cdot P(\bar{P})=0{,}3\cdot 0{,}7+0{,}1\cdot 0{,}3=0{,}24$

$P(\bar{E})=1-P(E)=1-0{,}24=0{,}76 \quad \boxed{P(\bar{E})=0{,}76}$

b) $P(E/P)=\dfrac{P(P\cap E)}{P(P)} \Rightarrow P(P\cap E)=P(E/P)\cdot P(P)=0{,}7\cdot 0{,}3=0{,}21$

$P(P\cup E)=P(P)+P(E)-P(P\cap E)=0{,}7+0{,}24-0{,}21=0{,}73$ $\boxed{P(P\cup E)=0{,}73}$

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
El número de kilómetros que un corredor entrena a la semana mientras prepara una carrera popular se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ horas y desviación típica σ = 10 horas.
a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 atletas, obteniéndose una media muestral de 30 kilómetros. Determine un intervalo de confianza al 95 % para μ.
b) Suponga que μ = 28 kilómetros. Calcule la probabilidad de que, al tomar una muestra aleatoria simple de 10 atletas, la media muestral, X, esté entre 28 y 30 kilómetros.

a) n=20, $\sigma=30$, $\sigma=10$, $1-\alpha=0{,}95$

$$1-\alpha=0{,}95 \Rightarrow \alpha=0{,}05 \Rightarrow \alpha/2=0{,}025 \Rightarrow 1-\alpha/2=0{,}975 \Rightarrow z_{\alpha/2}=1{,}96$$

$$I.C:\left(\bar{X}\pm z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\left(30\pm 1{,}96\cdot\frac{10}{\sqrt{20}}\right)=(25{,}617,\ 34{,}382)\ \boxed{I.C:(25{,}617,\ 34{,}382)}$$

b) $\mu=28$, n=10, P (28 < X < 30)?

$$P(28<X<30)=P\left(\frac{28-28}{10/\sqrt{10}}\le z\le 30-\frac{30-28}{10/\sqrt{10}}\right)=P(0\le z\le 0{,}63)$$

$$P(0\le z\le 0{,}63)=P(z\le 0{,}63)-P(z\le 0)=0{,}7357-0{,}5=0{,}2357\ \boxed{P=0{,}2357}$$

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Un agricultor dispone de 5 hectáreas, como máximo, de terreno para dedicar a la plantación de trigo y cebada. Cada hectárea dedicada al trigo le supone un beneficio de 200 euros, mientras que cada hectárea dedicada a la cebada le supone un beneficio de 60 euros. Entre ambos cultivos es obligatorio plantar como mínimo una hectárea, y la normativa autonómica le obliga a que el cultivo de trigo ocupe como mucho una hectárea más que el de cebada. Represente la región factible, determine las hectáreas que debería dedicar a cada cultivo para maximizar sus beneficios y obtenga el valor del beneficio máximo.

Sea x las hectáreas dedicadas al trigo e y las hectáreas dedicadas a la cebada.
Las restricciones son:

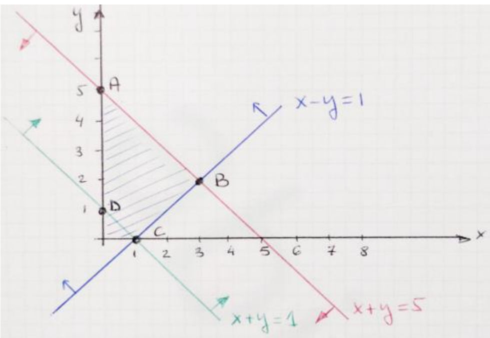
$x+y\ge 1$

$x+y\le 5$

$x-y\le 1$

$x\ge 0$

$y\ge 0$



La función objetivo es: $B(x,y)=200x+60y$

Obtenemos los vértices de la región factible:

$$\left.\begin{matrix} x+y=1 \\ x-y=1 \end{matrix}\right\}(1,0) \qquad \left.\begin{matrix} x+y=1 \\ x=0 \end{matrix}\right\}(0,1) \qquad \left.\begin{matrix} x+y=5 \\ x=0 \end{matrix}\right\}(0,5) \qquad \left.\begin{matrix} x+y=5 \\ x-y=1 \end{matrix}\right\}(3,2)$$

Sustituyendo estos puntos en la función objetivo tenemos:

$$B(1,0)=200\cdot 1+60\cdot 0=200$$

$$B(0,1)=200\cdot 0+60\cdot 1=60$$

$$B(0,5)=200\cdot 0+60\cdot 5=300$$

$$B(3,2)=200\cdot 3+60\cdot 2=720$$

El máximo beneficio se obtiene destinando 3 hectáreas al trigo y 2 a la cebada, y se obtiene un beneficio de 720 euros.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x+y+z=2a-1 \\ 2x+y+az=1 \\ x+ay+z=1 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.
b) Resuelva el sistema de ecuaciones para a = 0.

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2a-1 \\ 2 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right)$

Calculamos el determinante de A y lo igualamos a cero:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}=-a^2+3a-2;\ |A|=0 \ \Rightarrow\ -a^2+3a-2=0 \ \Rightarrow\ a=1,\ a=2$$

$\boxed{\text{Si } a\neq 1 \text{ ó } a\neq 2 \ \Rightarrow\ |3x3|=0 \ \Rightarrow\ RgA=RgA^*=\text{nº incógnitas} \ \Rightarrow\ \text{S.C.D.}}$

Si a=2: $A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Estudiamos el rango de A: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\neq 0 \ \Rightarrow\ RgA=2$

Estudiamos el rango de A^*: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\neq 0 \ \Rightarrow\ RgA^*=3$

$\boxed{\text{Si } a=1 \ \Rightarrow\ RgA=2\neq RgA^*=3 \ \Rightarrow\ \text{S.I.}}$

academia@abitaulapinar.com
www.abitaulapinar.com
abitaulapinar.com
C/ Jazmín, 29 (Pinar de Chamartín)
91.056.80.48 / 622.92.94.25

Si a=1: $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Estudiamos el rango de A: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow RgA = 2$

Estudiamos el rango de A^*: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow RgA^* = 2$

$\boxed{\text{Si } a = 1 \Rightarrow RgA = RgA^* = 2 < \text{nºincógnitas} \Rightarrow \text{S.C.I.}}$

b) $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2:F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3:F_3-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=-1 \\ -y-2z=3 \\ -y=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{y=-2,\ x=3/2,\ z=-1/2}$$

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - \dfrac{1}{9} & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{x+1}{x^2-9} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) Determine el dominio de f(x) y calcule el valor del parámetro a ∈ R para que f(x) sea derivable en todo su dominio.
b) Para a = 0 determine, si existen, las asíntotas de f(x).

a) Dominio:

Para la función: $f(x) = x^2 + ax - \dfrac{1}{9}$, el dominio es $\mathbb{R}$ y por tanto $(-\infty, 0]$

Para la función: $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-9}$ el dominio será todos lo reales menos los valores de x que anulen el denominador, luego: $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$

Pero como sólo está definida a partir del 0, sólo tendremos en cuenta el +3, por lo que:

$\boxed{Domf(x): \mathbb{R} - \{3\}}$

Para que sea derivable debe ser continua:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^2+ax-\frac{1}{9}\right)=-\frac{1}{9}\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x+1}{x^2-9}=-\frac{1}{9}\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\frac{1}{9}\\ \qquad\qquad\qquad f(0)=-\frac{1}{9}\end{array}\right\}\Rightarrow f(x) \text{ es continua en } x=0 \text{ y por tanto en todo su}$$

dominio.

Hacemos la derivada de la función: $f'(x)=\begin{cases}2x+a & \text{si } x<0\\ \dfrac{-x^2-2x-9}{\left(x^2-9\right)^2} & \text{si } x>0\end{cases}$

Para que la función sea derivable debe ser continua la derivada por lo que:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}(2x+a)=a\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-x^2-2x-9}{\left(x^2-9\right)^2}=-\dfrac{1}{9}\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{a=-\frac{1}{9}}$$

b) $f(x)=\begin{cases}x^2-\dfrac{1}{9} & \text{si } x\le 0\\ \dfrac{x+1}{x^2-9} & \text{si } x>0\end{cases}$

<u>Asíntota vertical:</u>

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x+1}{x^2-9}=\dfrac{4}{0^+}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x+1}{x^2-9}=\dfrac{4}{0^-}=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{\text{Asíntota vertical en } x=3}$$

<u>Asíntota horizontal:</u>

$\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x^2-\dfrac{1}{9}\right)=\infty$ No tiene asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+1}{x^2-9}=0$ $\boxed{\text{Asíntota horizontal cuando x tiende a } +\infty \text{ en } y=0}$

<u>Asíntota oblicua:</u>

Sólo puede haber cuando x tiende a $-\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x-\dfrac{1}{9x}\right)=\infty$ No hay asíntota oblicua.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Sean C y D dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(C)=0{,}4$, $P(D)=0{,}6$, $P(C\cup D)=0{,}8$

Calcule:

a) $P(C/D)$.

b) $P\left(\overline{C\cap D}/C\right)$.

a) $P(C/D)=\dfrac{P(C\cap D)}{P(D)}$

$$P(C\cup D)=P(C)+P(D)-P(C\cap D)\ \Rightarrow\ P(C\cap D)=P(C)+P(D)-P(C\cup D)$$

$$P(C\cap D)=0{,}4+0{,}6-0{,}8=0{,}2$$

$$P(C/D)=\frac{0{,}2}{0{,}6}=0{,}33\quad \boxed{P(C/D)=0{,}33}$$

b) $P(\overline{C\cap D}/C)=\dfrac{P(C)-P(C\cap D)}{P(D)}=\dfrac{0{,}4-0{,}2}{0{,}4}=0{,}5\quad \boxed{P(\overline{C\cap D}/C)=0{,}5}$

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
Las calorías consumidas por un atleta durante una carrera popular se pueden aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ calorías y desviación típica σ = 300 calorías.
a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 100 calorías con un nivel de confianza del 95 %.
b) Suponga que μ = 3000 calorías. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño n = 50 atletas, la media de las calorías consumidas durante la carrera por los 50 atletas sea mayor que 2700 calorías.

a) σ = 300, E<100

$$1-\alpha=0{,}95\ \Rightarrow\ \alpha=0{,}05\ \Rightarrow\ \alpha/2=0{,}025\ \Rightarrow\ 1-\alpha/2=0{,}975\ \Rightarrow\ z_{\alpha/2}=1{,}96$$

$$E<Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \Rightarrow\ n>\left(Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2\ \Rightarrow n>\left(1{,}96\cdot\frac{300}{100}\right)^2>34{,}57\ \Rightarrow \boxed{n=35}$$

b) μ = 3000, n=5, P(x>2700)?

$$\mu=3000\ \Rightarrow\ \overline{X}=N(3000,\ 300)$$

Para 50 atletas: $\overline{X}_{50}=N\left(3000,\ \dfrac{300}{\sqrt{50}}\right)$

$$P(\overline{X}_{50}\geq 2700)=P\left(Z\geq\frac{2700-3000}{\frac{300}{\sqrt{50}}}\right)=P(Z\geq -7{,}07)=P(Z\leq 7{,}01)=1\quad\boxed{P=1}$$