UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso 2019-2020 Ordinaria
MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.
TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

A.1. (2 puntos)
Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x+ay=0 \\ x+2z=0 \\ x+ay+(a+1)z=a \end{cases}$$

a) Discute el sistema en función de los valores del parámetro a.
b) Resuelva el sistema para $a=0$.

A.2. (2 puntos)
Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x)=\frac{4x-x^3}{3x+x^2}+4$$

a) Calcule el dominio de la función y obtenga el valor que hay que asignar a f(x) en x = 0 para que la función anterior sea continua en este punto.
b) Obtenga las asíntotas de esta función en caso de que existan.

A.3. (2 puntos)
Se considera la función real de variable real $f(x)=-x^4+x^3+2x^2$
a) Determine la ecuación de la recta tangente a f(x) en el punto de abscisa x = –1.
b) Obtenga el área del recinto acotado delimitado por la función f(x) y el eje de abscisas para valores de x > 0.

A.4. (2 puntos)
Una asociación de senderismo ha programado tres excursiones para el mismo fin de semana. El 40% de los socios irá al nacimiento del río Cuervo, el 35% a las Hoces del río Duratón y el resto al Cañón del río Lobos. La probabilidad de lluvia en cada una de estas zonas se estima en 0,5, 0,6 y 0,45, respectivamente. Elegido un socio al azar:
a) Calcule la probabilidad de que en su excursión no llueva.
b) Si en la excursión realizada por este socio ha llovido, ¿cuál es la probabilidad de que este socio haya ido al nacimiento del río Cuervo?

A.5. (2 puntos)
La publicidad de una marca de bolígrafos afirma que escriben 2 km. Para realizar un control de calidad, se considera que la longitud de escritura de estos bolígrafos puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ km y desviación típica 0,5 km.

a) Obtenga el número mínimo de bolígrafos que deberían seleccionarse en una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral, sea como mucho 0,05 km con un nivel de confianza del 95,44 %.
b) Si la longitud media de escritura, μ, es la anunciada en la publicidad, calcule la probabilidad de que, con una muestra de 16 bolígrafos elegidos al azar, se puedan escribir más de 30 km.

B.1. (2 puntos)

Se considera la matriz A dada por $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcule el valor del parámetro real m para que $A^2-5A=-4I$, siendo I la matriz identidad.
b) Para m = 1, indique si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

B.2. (2 puntos)
La región del plano S está definida por las siguientes expresiones:

$$x\geq 3,\quad 0\leq y\leq 15,\quad y-5+\frac{x}{2}\geq 0,\quad y-x\leq 10,\quad y+20\geq 2x$$

a) Determine las coordenadas de sus vértices y represente en el plano la región S.
b) Obtenga el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x,y)=x+y$ en esta región, indicando los puntos en los cuales se alcanzan estos valores.

B.3. (2 puntos)
Se considera la función real de variable real dada por la siguiente expresión:

$$f(x)=3(x+k)e^{-x/2}$$

a) Indique el dominio de la función y obtenga razonadamente el valor del parámetro real k para que la tangente a la función en el punto de abscisa x = 1 sea horizontal. Determine también la ecuación de la recta tangente a la función en dicho punto.
b) Para k = 1, señale los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x).

B.4. (2 puntos)
Un estudio sobre la obsolescencia programada en una marca de electrodomésticos reveló que la probabilidad de que un microondas se estropee durante el período de garantía es 0,02. Esta probabilidad se eleva a 0,05 para sus hornos eléctricos y se sabe que estos sucesos son independientes. Cuando el microondas se ha estropeado en el período de garantía, la marca amplía esta por dos años más. El 40% de los clientes con garantía ampliada no conserva la factura de compra durante los dos años de ampliación.
a) Un cliente compra un horno y un microondas de esta marca. Obtenga la probabilidad de que se estropee al menos uno de ellos durante el período de garantía.
b) Un cliente ha comprado un microondas. Calcule la probabilidad de que se le estropee durante el período de garantía y conserve la factura durante los dos años de ampliación.

B.5. (2 puntos)
Determinado modelo de lavadora tiene un programa de lavado con un consumo de agua que puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal cuya desviación típica es de 7 litros.

a) En una muestra aleatoria simple de 10 lavadoras los consumos de agua en un lavado con este programa fueron los siguientes: 40 45 38 44 41 40 35 50 40 37 Construya el intervalo de confianza al 90% para estimar el consumo medio de agua de este modelo de lavadoras con dicho programa de lavado.
b) A partir de una muestra de 64 lavadoras elegidas al azar, se obtuvo un intervalo de confianza para la media con una longitud de 5 litros. Obtenga el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.

SOLUCIONES

A.1. (2 puntos)
Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x+ay=0 \\ x+2z=0 \\ x+ay+(a+1)z=a \end{cases}$$

a) Discute el sistema en función de los valores del parámetro a.
b) Resuelva el sistema para $a=0$.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es: $A=\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & a+1 \end{pmatrix}$

Con determinante $|A|=\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & a+1 \end{vmatrix}=2a-a^2-a-2a=-a^2-a$

Lo igualamos a cero:

$$|A|=0 \Rightarrow -a^2-a=0 \Rightarrow -a(a+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a+1=0 \Rightarrow a=-1 \end{cases}$$

Hay tres casos a estudiar.

<u>CASO 1.</u> $a\neq 0$ y $a\neq -1$
En este caso el determinante de A no es cero y su rango es 3, al igual que el rango de A^* y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado**.

<u>CASO 2.</u> $a=0$
En este caso el determinante de A es cero y el rango de A es menor de 3

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Estudiamos el rango de A:

$$A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1-2=-1\neq 0 \qquad \text{El rango de A es 2.}$$

Determinamos el rango de A^*. Buscamos un menor de orden 3 distinto de cero:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)$$

Como solo he añadido una columna con todo ceros, el rango de A^* es 2, igual que el de A.
Rango de A = Rango de A/B = 2 < 3 = número de incógnitas.
El sistema es **compatible indeterminado**.

<u>CASO 3.</u> $a=-1$
En este caso el determinante de A es cero y el rango de A es menor de 3

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

Estudiamos el rango de A. Buscamos un menor de orden 2 distinto de cero:

$$A=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1\neq 0 \qquad \text{El rango de A es 2.}$$

Determinamos el rango de A^*:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 0 & -1\end{array}\right)$$

Buscamos un menor de orden 3 distinto de cero:

$$|A|=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{vmatrix}=2\neq 0 \ \text{El rango de } A^* \text{ es 3.}$$

Rango de A es 2 ≠ 3 = Rango de A^*. El sistema es **incompatible**.

b) Para $a=0$ estamos en el caso 2 y el sistema es compatible indeterminado.

$$\left.\begin{array}{l}x=0\\ x+2z=0\\ x+z=0\end{array}\right\}\Rightarrow x=0 \ \Rightarrow \left.\begin{array}{l}2z=0\\ z=0\end{array}\right\}\Rightarrow y=t,\ z=0 \qquad \boxed{x=0,\ y=t,\ z=0} \ \text{siendo } t\in\mathbb{R}$$

A.2. (2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por $f(x)=\dfrac{4x-x^3}{3x+x^2}+4$

a) Calcule el dominio de la función y obtenga el valor que hay que asignar a f(x) en x = 0 para que la función anterior sea continua en este punto.
b) Obtenga las asíntotas de esta función en caso de que existan.

a) El dominio de definición de la función es todo $\mathbb{R}$ menos los valores que anulen el denominador.

$$3x+x^2=0 \;\Rightarrow\; x(3+x)=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=0 \\ 3+x=0 \;\Rightarrow\; x=-3 \end{cases}$$

El dominio de la función $\mathbb{R}-\{-3,\ 0\}$

Para que la función sea continua en x = 0 debe cumplirse que:

- Exista $f(0)$:

$$f(0)=\frac{0}{0}+4 \;\Rightarrow\; \nexists\, f(0)$$

- Exista $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{4x-x^3}{3x+x^2}+4=\frac{0}{0}+4 \text{ Indeterminación 0/0}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}(4-x^2)}{\cancel{x}(3+x)}+4=\lim_{x\to 0}\frac{4-x^2}{3+x}+4=\frac{4}{3}+4=\frac{16}{3}$$

- Ambos valores deben ser iguales.

Por tanto $f(0)$ debe valer $\dfrac{16}{3}$ para que la función sea continua en x=0. $\boxed{f(0)=\dfrac{16}{3}}$

b) <u>Asíntotas verticales</u>:
En x=0:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{4x-x^3}{3x+x^2}+4=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}(4-x^2)}{\cancel{x}(3+x)}+4=\frac{4}{3}+4=\frac{16}{3} \;\Rightarrow \text{No hay asíntota en x=0}$$

En x=-3:

$$\lim_{x\to -3}\frac{4x-x^3}{3x+x^2}+4=\frac{-12+27}{0}+4=\infty \;\Rightarrow \text{Asíntota vertical en } \boxed{x=-3}$$

Hacemos los límites laterales:

$$\lim_{x\to -3^+}\frac{4x-x^3}{3x+x^2}+4=\frac{-12+27}{0^-}+4=-\infty \qquad \lim_{x\to -3^-}\frac{4x-x^3}{3x+x^2}+4=\frac{-12+27}{0^+}+4=+\infty$$

<u>Asíntota horizontal</u>:

$$\lim_{x\to \infty} f(x)=\lim_{x\to \infty}\frac{4x-x^3}{3x+x^2}+4=\frac{\infty}{\infty}+4 \;\Rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x\to \infty} f(x)=\lim_{x\to \infty}\frac{4x-x^3}{3x+x^2}+4=\lim_{x\to \infty}\frac{-x^3}{x^2}+4=\lim_{x\to \infty}\ -x+4\quad \frac{\infty}{\infty}+4=-\infty \text{ No tiene asíntota horizontal.}$$

Asíntota oblicua: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x - x^3}{3x^2 + x^3} + \frac{4}{x} = -1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x - x^3}{3x + x^2} + 4 + x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{4x - x^3 + 12x + 4x^2 + 3x^2 + x^3}{3x + x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{16x + 7x^2}{3x + x^2} = 7$$

Asíntota oblicua en $\boxed{y = -x + 7}$

A.3. (2 puntos)
Se considera la función real de variable real $f(x) = -x^4 + x^3 + 2x^2$

a) Determine la ecuación de la recta tangente a f(x) en el punto de abscisa x = −1.
b) Obtenga el área del recinto acotado delimitado por la función f(x) y el eje de abscisas para valores de x > 0.

a) La ecuación de la recta tangente en x = a es: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

En $x = -1$ tenemos:

$$f(x) = -x^4 + x^3 + 2x^2 \Rightarrow f'(x) = -4x^3 + 3x^2 + 4x \begin{cases} f(-1) = -(-1)^4 + (-1)^3 + 2(-1)^2 = -1 - 1 + 2 = 0 \\ f'(-1) = -4(-1)^3 + 3(-1)^2 + 4(-1) = 4 + 3 - 4 = 3 \end{cases}$$

La recta tangente es: $y - 0 = 3(x + 1) \Rightarrow \boxed{y = 3x + 3}$

b) Veamos si la función corta el eje OX.

$$f(x) = 0 \Rightarrow -x^4 + x^3 + 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2(-x^2 + x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -x^2 + x + 2 = 0 \end{cases}$$

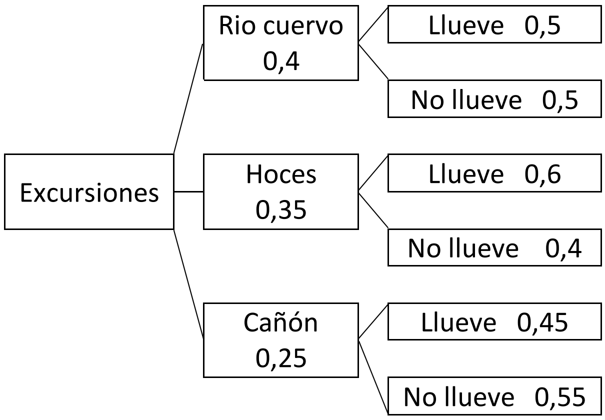
$$-x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Corta en tres puntos: x = −1; x = 0 y x = 2.
Como nos piden el área a partir de x=o, el área del recinto pedido es el valor absoluto de la integral definida entre 0 y 2 de la función $f(x) = -x^4 + x^3 + 2x^2$

$$A = \int_0^2 (-x^4 + x^3 + 2x^2)\, dx = \left[\frac{-x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} \right]_0^2 = \left[\frac{-2^5}{5} + \frac{2^4}{4} + \frac{2 \cdot 2^3}{3} \right] - \left[\frac{-0^5}{5} + \frac{0^4}{4} + \frac{2 \cdot 0^3}{3} \right] \boxed{A = \frac{44}{15}\ u^2}$$

A.4. (2 puntos)
Una asociación de senderismo ha programado tres excursiones para el mismo fin de semana. El 40% de los socios irá al nacimiento del río Cuervo, el 35% a las Hoces del río Duratón y el resto al Cañón del río Lobos. La probabilidad de lluvia en cada una de estas zonas se estima en 0,5, 0,6 y 0,45, respectivamente. Elegido un socio al azar:
a) Calcule la probabilidad de que en su excursión no llueva.
b) Si en la excursión realizada por este socio ha llovido, ¿cuál es la probabilidad de que este socio haya ido al nacimiento del río Cuervo?

Diagrama en árbol:



a) Puede suceder que no llueva de tres formas distintas, calculamos la probabilidad de cada una y las sumamos.

P(No llueva) = 0,4 · 0,5 + 0,35 · 0,4 + 0,25 · 0,55 = 0,20 + 0,14 + 0,1375 $\boxed{P = 0{,}4775}$

b) Es una probabilidad condicionada. Aplicamos la fórmula de Bayes.

$$P(\text{Río Cuervo}/\text{Ha llovido}) = \frac{P(\text{Río Cuervo} \cap \text{Ha llovido})}{P(\text{Ha llovido})} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}5}{1-0{,}4475} = 0{,}383 \quad \boxed{P = 0{,}383}$$

A.5. (2 puntos)
La publicidad de una marca de bolígrafos afirma que escriben 2 km. Para realizar un control de calidad, se considera que la longitud de escritura de estos bolígrafos puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ km y desviación típica 0,5 km.
a) Obtenga el número mínimo de bolígrafos que deberían seleccionarse en una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral, sea como mucho 0,05 km con un nivel de confianza del 95,44 %.
b) Si la longitud media de escritura, μ, es la anunciada en la publicidad, calcule la probabilidad de que, con una muestra de 16 bolígrafos elegidos al azar, se puedan escribir más de 30 km.

X= Longitud de escritura de un bolígrafo en km. X=N (μ, 0.5)

a) Con un nivel de confianza del 95,44 %.

$$1-\alpha = 0{,}9544 \;\Rightarrow\; \alpha = 0{,}0456 \;\Rightarrow\; \alpha/2 = 0{,}0228 \;\Rightarrow\; 1-\alpha/2 = 0{,}9772 \;\Rightarrow\; z_{\alpha/2} = 2$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; 0{,}05 = 2\frac{0{,}5}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; \sqrt{n} = \frac{1}{0{,}05} = 20 \;\Rightarrow\; n = 400$$

La muestra debe ser de más de 400 bolígrafos.

b) $\mu = 2 \;\Rightarrow\; \overline{X} = N(2,\ 0.5)$

Si deseamos estudiar lo que se escribe con 16 bolígrafos consideramos la distribución de la media de los 16 bolígrafos.

$$\overline{X}_{16} = N\left(2,\ \frac{0{,}5}{\sqrt{16}}\right) = N\left(2,\ \frac{1}{8}\right)$$

Si con 16 bolígrafos quieres escribir más de 30 km, entonces cada bolígrafo debe escribir más de 30/16

$$P\left(\overline{X}_{16} \geq \frac{30}{16}\right) = P\left(Z \geq \frac{\frac{30}{16}-2}{\frac{1}{8}}\right) = P(Z \geq -1) = P(Z \leq 1) = 0{,}8413 \quad \boxed{P = 0{,}8413}$$

B.1. (2 puntos)

Se considera la matriz A dada por $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcule el valor del parámetro real m para que $A^2 - 5A = -4I$, siendo I la matriz identidad.
b) Para m = 1, indique si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 1+m & 10 \\ 0 & m^2 & 0 \\ 5 & -1-m & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 5A = \begin{pmatrix} 11 & 1+m & 10 \\ 0 & m^2 & 0 \\ 5 & -1-m & 6 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & m-4 & 0 \\ 0 & m^2-5m & 0 \\ 5 & 4-m & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 5A = -4I \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & m-4 & 0 \\ 0 & m^2-5m & 0 \\ 5 & 4-m & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} m-4=0 \\ m^2-5m=-4 \\ 4-m=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} m=4 \\ m^2-5m=-4 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{m=4}$$

b) Para m = 1 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 6-2 = 4 \neq 0$$ La matriz A es invertible.

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj(A^T) = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}}$$

B.2. (2 puntos)
La región del plano S está definida por las siguientes expresiones:

$$x \geq 3, \quad 0 \leq y \leq 15, \quad y - 5 + \frac{x}{2} \geq 0, \quad y - x \leq 10, \quad y + 20 \geq 2x$$

a) Determine las coordenadas de sus vértices y represente en el plano la región S.
b) Obtenga el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x,y) = x + y$ en esta región, indicando los puntos en los cuales se alcanzan estos valores.

a) Dibujamos las rectas asociadas a las expresiones que definen la región del plano.

$y - 5 + \frac{x}{2} \geq 0$

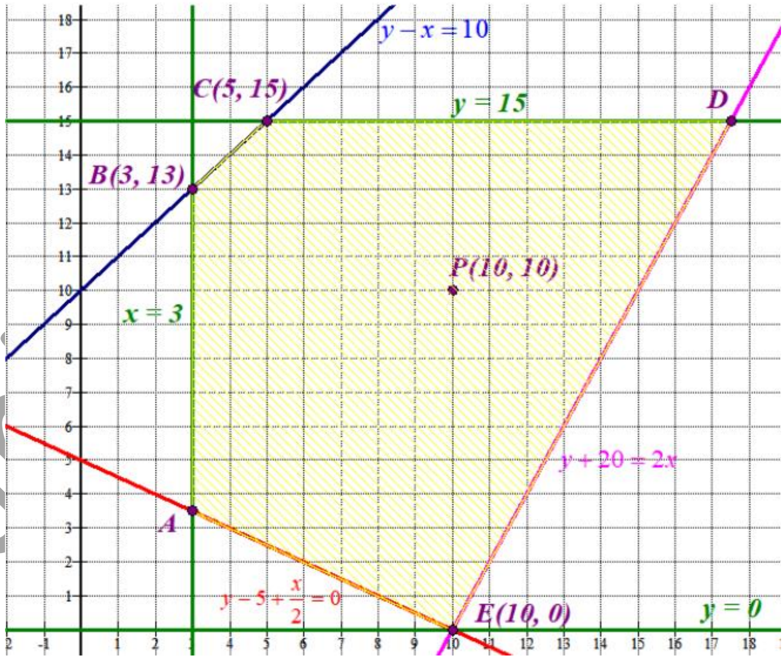
x	0	10
y	5	0

$y - x \leq 10$

x	0	-10
Y	10	0

$y + 20 \geq 2x$

x	0	10
y	-20	0



Las coordenadas de los puntos A y D lo obtenemos resolviendo el sistema correspondiente.

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 \\ y - 5 + \frac{x}{2} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A\left(3, \frac{7}{2}\right) \qquad \left.\begin{array}{l} x = 3 \\ y - x = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow B(3,13) \qquad \left.\begin{array}{l} y = 15 \\ y - x = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow C(5,15)$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 15 \\ y + 20 = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow D\left(\frac{35}{2}, 15\right) \qquad \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ y - x = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow E(10,0)$$

b) Valoramos la función $f(x,y) = x + y$ en cada uno de los vértices de la región:

$A\left(3,\frac{7}{2}\right) \Rightarrow f\left(3,\frac{7}{2}\right)=3+\frac{7}{2}=6,5$

$B\left(3,\frac{7}{2}\right)13 \Rightarrow f(3,13)=3+13=16$

$C(5,15) \Rightarrow f(5,15)=5+15=20$

$D\left(\frac{35}{2},15\right) \Rightarrow f\left(\frac{35}{2},15\right)=\frac{35}{2}+15=32,5$

$E(10,0) \Rightarrow f(10,0)=10+0=10$

El valor mínimo se alcanza en el punto $A\left(3,\frac{7}{2}\right)$ siendo este valor mínimo de 6,5

El valor máximo se alcanza en el punto $D\left(\frac{35}{2},15\right)$ siendo este valor máximo de 32,5.

B.3. (2 puntos)
Se considera la función real de variable real dada por la siguiente expresión:

$$f(x)=3(x+k)e^{-x/2}$$

a) Indique el dominio de la función y obtenga razonadamente el valor del parámetro real k para que la tangente a la función en el punto de abscisa x = 1 sea horizontal. Determine también la ecuación de la recta tangente a la función en dicho punto.
b) Para k = 1, señale los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x).

a) El dominio es todo $\mathbb{R}$, pues la parte exponencial $f(x)=3(x+k)e^{-x/2}$ no plantea ningún problema y la polinómica tampoco.
Para que la tangente a la función en el punto de abscisa x = 1 sea horizontal debe tener pendiente 0, es decir la derivada en x = 1 debe ser 0.

$$f(x)=3(x+k)e^{-x/2} \Rightarrow f'(x)=3e^{-x/2}+3(x+k)\left(\frac{-1}{2}\right)e^{-x/2}$$

$$f'(1)=0 \Rightarrow 3e^{-1/2}+3(1+k)\left(\frac{-1}{2}\right)e^{-1/2} = 3e^{-1/2}\left(\frac{1-k}{2}\right)=0 \Rightarrow \boxed{k=1}$$

Para k = 1, en x=1 la recta tangente será: $y-f(1)=f'(1)(x-1)$

$$f(1)=3(1+1)e^{-1/2}=\frac{6}{\sqrt{e}}$$

$$f'(1)=3e^{-1/2}+3(1+1)\left(\frac{-1}{2}\right)e^{-1/2}=0$$

La recta tangente es: $y-\frac{6}{\sqrt{e}}=0 \Rightarrow \boxed{y=\frac{6}{\sqrt{e}}}$

b) Para k = 1 la derivada es

$$f'(x)=3e^{-x/2}+3(x+1)\left(\frac{-1}{2}\right)e^{-x/2}=3e^{-x/2}\left(\frac{1-x}{2}\right)$$

La igualamos a cero.

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3e^{-x/2}\left(\frac{1-x}{2}\right)=0 \Rightarrow \frac{1-x}{2}=0 \Rightarrow x=1$$

Veamos que ocurre antes y después de 1.

- En $(-\infty,1)$ tomamos x = 0 y sustituimos en la derivada: $f'(0)=3e^{0/2}\left(\frac{1-0}{2}\right)>0$

La función crece en $(-\infty,1)$.

- En $(1,+\infty)$ tomamos x = 2 y sustituimos en la derivada: $f'(2)=3e^{-2/2}\left(\frac{1-2}{2}\right)<0$

La función decrece en $(1,+\infty)$.

$\boxed{\text{La función crece en } (-\infty,1) \text{ y decrece en } (1,+\infty)}$

B.4. (2 puntos)
Un estudio sobre la obsolescencia programada en una marca de electrodomésticos reveló que la probabilidad de que un microondas se estropee durante el período de garantía es 0,02. Esta probabilidad se eleva a 0,05 para sus hornos eléctricos y se sabe que estos sucesos son independientes. Cuando el microondas se ha estropeado en el período de garantía, la marca amplía esta por dos años más. El 40% de los clientes con garantía ampliada no conserva la factura de compra durante los dos años de ampliación.
a) Un cliente compra un horno y un microondas de esta marca. Obtenga la probabilidad de que se estropee al menos uno de ellos durante el período de garantía.
b) Un cliente ha comprado un microondas. Calcule la probabilidad de que se le estropee durante el período de garantía y conserve la factura durante los dos años de ampliación.

a) Utilizamos el suceso contrario. El suceso contrario a "Se estropee al menos uno de ellos" es "No se estropea ninguno".
La probabilidad de que se estropee al menos uno de ellos es 1 menos la probabilidad de que no se estropee ninguno.

P(se estropee al menos uno de ellos) = 1 – P(no se estropee ninguno)

$P(\text{Se estropee al menos uno de ellos})=1-0{,}98\cdot 0{,}95=0{,}069$ $\boxed{P=0{,}069}$

b) P(Se estropee el microondas y conserve la garantía) = P(Se estropee el microondas) · P(Conserve la garantía / se ha estropeado) = 0,02·(1 – 0,4) = 0,02·0,6 = 0,012 $\boxed{P=0{,}012}$

B.5. (2 puntos)
Determinado modelo de lavadora tiene un programa de lavado con un consumo de agua que puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal cuya desviación típica es de 7 litros.
a) En una muestra aleatoria simple de 10 lavadoras los consumos de agua en un lavado con este programa fueron los siguientes: 40 45 38 44 41 40 35 50 40 37 Construya el intervalo de confianza al 90% para estimar el consumo medio de agua de este modelo de lavadoras con dicho programa de lavado.
b) A partir de una muestra de 64 lavadoras elegidas al azar, se obtuvo un intervalo de confianza para la media con una longitud de 5 litros. Obtenga el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.

X= Consumo de agua de un programa de lavado. X=N(μ, 7)

a) n = 10

$$\overline{X}=\frac{40+45+38+44+41+40+35+50+40+37}{10}=41$$

Con un nivel del confianza del 90 %

$$1-\alpha=0,9 \Rightarrow \alpha=0,1 \Rightarrow \alpha/2=0,05 \Rightarrow 1-\alpha/2=0,95 \Rightarrow z_{\alpha/2}=1,645$$

El intervalo de confianza será:

$$\text{I.C.}=\left(\overline{X}\pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\left(41\pm 1,645\frac{7}{\sqrt{10}}\right)=(37.358,\ 44.641)\quad \boxed{\text{I.C.}=(37.358,\ 44.641)}$$

b) n = 64

Si el intervalo de confianza tiene longitud 5 el error es la mitad 2,5 litros.
Utilizando la fórmula del error tenemos:

$$E=z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2,5=z_{\alpha/2}\frac{7}{\sqrt{64}} \Rightarrow z_{\alpha/2}=2,86$$

Buscando en la tabla de la N(0, 1) tenemos que $1-\alpha/2=0,99709$ Luego:

$$1-\alpha/2=0,99709 \Rightarrow \alpha/2=0,0021 \Rightarrow \alpha=0,0042 \Rightarrow 1-\alpha=0,9958$$

El nivel de confianza es $\boxed{99,58\%}$