UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso 2019-2020 Ordinaria
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\begin{cases} x+ay+z=a+1 \\ -ax+y-z=2a \\ -y+z=a \end{cases}$$

Se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores de a.

b) (0.5 puntos) Resolver el sistema para a = 0.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las funciones $f(x)=x^3+3x^2-1$ y $g(x)=6x$, se pide:

a) (0.5 puntos) Justificar, usando el teorema adecuado, que existe algún punto en el intervalo [1,10] en el que ambas funciones toman el mismo valor.

b) (1 punto) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva y = f(x) con pendiente mínima.

c) (1 punto) Calcular $\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las rectas $r\equiv\begin{cases} x-y=2 \\ 3x-z=-1 \end{cases}$, $s\equiv\begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=-4-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

se pide:

a) (1 punto) Calcular la posición relativa de las rectas r y s.

b) (0.5 puntos) Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pasa por el punto P(2, −1,5).

c) (1 punto) Encontrar la ecuación del plano paralelo a la recta r que contiene a la recta s.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un arquero aficionado dispone de 4 flechas y dispara a un globo colocado en el centro de una diana. La probabilidad de alcanzar el blanco en el primer tiro es del 30%. En los lanzamientos sucesivos la puntería se va afinando, de manera que en el segundo es del 40%, en el tercero del 50% y en el cuarto del 60%. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que el globo haya explotado sin necesidad de hacer el cuarto disparo.

b) (0.5 puntos) Calcular la probabilidad de que el globo siga intacto tras el cuarto disparo.

c) (1 punto) En una exhibición participan diez arqueros profesionales, que aciertan un 85% de sus lanzamientos. Calcular la probabilidad de que entre los 10 hayan explotado exactamente 6 globos al primer disparo.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Según informa la Asociación Empresarial de Acuicultura de España, durante el año 2016 se comercializaron en España doradas, lubinas y rodaballos por un total de 275.8 millones de euros. En dicho informe figura que se comercializaron un total de 13740 toneladas de doradas y 23440 toneladas de lubinas. En cuanto a los rodaballos, se vendieron 7400 toneladas por un valor de 63.6 millones de euros. Sabiendo que el kilo de dorada fue 11 céntimos más caro que el kilo de lubina, se pide calcular el precio del kilo de cada uno de los tres tipos de pescado anteriores.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & \text{si } \ x\le 1\\ (x-1)^3 & \text{si } \ x>1\end{cases}$

a) (0.5 puntos) Estudie su continuidad en [–4; 4].

b) (1 punto) Analice su derivabilidad y crecimiento en [–4; 4].

c) (1 punto) Determine si la función $g(x)=f'(x)$ está definida, es continua y derivable en x = 1.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados los puntos P(–3, 1, 2) y Q(–1, 0, 1) y el plano π de ecuación $x+2y-3z=4$, se pide:

a) (1 punto) Hallar la proyección de Q sobre π.

b) (0.5 puntos) Escribir la ecuación del plano paralelo a π que pasa por el punto P.

c) (1 punto) Escribir la ecuación del plano perpendicular a π que contiene a los puntos P y Q.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se consideran dos sucesos A y B tales que P(A) = 0.5, P(B) = 0.25 y P(A∩B) = 0.125. Responder de manera razonada o calcular lo que se pide en los siguientes casos:

a) (0.5 puntos) Sea C otro suceso, incompatible con A y con B. ¿Son compatibles los sucesos C y AUB?

b) (0.5 puntos) ¿Son A y B independientes?

c) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad $P(\overline{A}\cap\overline{B})$ (donde A denota el suceso complementario al suceso A).

d) (0.75 puntos) Calcular $P(\overline{B}/A)$.

SOLUCIONES

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\begin{cases} x+ay+z=a+1 \\ -ax+y-z=2a \\ -y+z=a \end{cases}$$

Se pide:
a) (2 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores de a.
b) (0.5 puntos) Resolver el sistema para a = 0.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ -a & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ con determinante } |A|=\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ -a & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=1+a+a^2-1=a^2+a$$

La matriz ampliada es $A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a+1 \\ -a & 1 & -1 & 2a \\ 0 & -1 & 1 & a \end{array}\right)$

$A=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ -a & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ Si igualamos a cero el determinante:

$$|A|=0 \Rightarrow a^2+a=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a+1=0 \Rightarrow a=-1 \end{cases}$$

Establecemos tres casos:

• CASO 1: $a\neq 0$ y $a\neq 1$
En este caso el determinante es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución. Es compatible determinado.

• CASO 2: $a=0$
En este caso el determinante es nulo. El rango de A no es 3. $\text{Rango}(A)\leq 2$

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ Si tomamos el menor que resulta de quitar la 3ª fila y la 3ª columna $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

con determinante $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$ El rango de A es 2.

Averiguamos el rango de A^* para a=0: $A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right)$

Se observa que la columna 1ª y 4ª son iguales, por lo que el rango de A^* es el mismo que el de A.

El rango de A es 2, al igual que el de A^*, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema tiene infinitas soluciones. Es <u>compatible indeterminado</u>.

- CASO 3: $a=-1$

En este caso el determinante es nulo. El rango de A no es 3. $\text{Rango}(A)\le 2$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

La 2ª y 3ª columna son proporcionales, por lo que tomamos el menor que resulta de quitar la 3ª fila y la 3ª columna

$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1+1=2\neq 0$ El rango de A es 2.

Averiguamos el rango de A^* para a = -1 $A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1 & -2\\ 0 & -1 & 1 & -1\end{array}\right)$

Se observa que la columna 2ª y 3ª son proporcionales, por lo que considero el menor de orden 3 que resulta de quitar la 2ª columna

$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=1+1+2=4\neq 0$ El rango de A^* es 3.

El rango de A es 2 distinto del rango de A^* que es 3. El sistema no tiene solución. El sistema es <u>incompatible</u>.

b) Para a = 0 estamos en el caso 2 por lo que es compatible indeterminado. El sistema queda:

$\left.\begin{array}{l}x+z=1\\ y-z=0\\ -y+z=0\end{array}\right\}$ La 2ª ecuación es igual a la tercera, quito la 3ª: $\left.\begin{array}{l}x+z=1\\ y-z=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x=1-z\\ y=z\end{array}\right\}$

La solución es $\boxed{x=1-\lambda,\ y=\lambda,\ z=\lambda \ \text{ con } \lambda\in\mathbb{R}}$

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las funciones $f(x)=x^3+3x^2-1$ y $g(x)=6x$, se pide:

a) (0.5 puntos) Justificar, usando el teorema adecuado, que existe algún punto en el intervalo [1,10] en el que ambas funciones toman el mismo valor.

b) (1 punto) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva y = f(x) con pendiente mínima.

c) (1 punto) Calcular $\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$

a) Consideramos la función $h(x)=f(x)-g(x)=x^3+3x^2-6x-1$

La función h(x) es un polinomio y es continua en [1,10] . Toma en los extremos del intervalo los valores

$$h(1)=1^3+3\cdot1^2-6\cdot1-1=-3<0$$
$$h(10)=10^3+3\cdot10^2-6\cdot10-1=1239>0$$

Aplicando el teorema de Bolzano tenemos que existe c∈[1,10] tal que:

$$h(c)=0 \;\Rightarrow\; f(c)-g(c)=0 \;\Rightarrow\; f(c)=g(c)$$

b) La recta tangente tiene como pendiente el valor de la derivada

$$f(x)=x^3+3x^2-1 \;\Rightarrow\; f'(x)=3x^2+6x$$

Para encontrar el valor donde se hace mínima la derivada vuelvo a derivar e igualo a cero.

$$f'(x)=3x^2+6x \;\Rightarrow\; f''(x)=6x+6$$
$$f''(x)=0 \;\Rightarrow\; 6x+6=0 \;\Rightarrow\; x=-1$$

Veamos si la derivada siguiente (tercera) es positiva.

$$f''(x)=6x+6 \;\Rightarrow\; f'''(x)=6 \;\Rightarrow\; f'''(-1)=6>0$$

La pendiente de la recta tangente presenta un mínimo en x = –1.

La ecuación de la tangente en x = –1 es:

$$f(x)=x^3+3x^2-1 \;\Rightarrow\; y_0=f(-1)=(-1)^3+3(-1)^2-1=1$$
$$f'(x)=3x^2+6x \;\Rightarrow\; m=f'(-1)=3(-1)^2+6(-1)=-3$$
$$y-y_o=m(x-x_o) \;\Rightarrow\; y-1=-3(x+1) \;\Rightarrow \boxed{y=-3x-2}$$

c) $$\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)}\,dx=\int_1^2 \frac{x^3+3x^2-1}{6x}\,dx=\int_1^2 \frac{x^2}{6}\,dx+\int_1^2 \frac{x}{2}\,dx-\int_1^2 \frac{1}{6x}\,dx=\frac{1}{6}\int_1^2 x^2\,dx+\frac{1}{2}\int_1^2 x\,dx-\frac{1}{6}\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx=$$

$$=\left[\frac{1}{6}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}-\frac{1}{6}\ln x\right]_1^2=\left(\frac{2^3}{18}+\frac{2^2}{4}-\frac{1}{6}\ln 2\right)-\left(\frac{1^3}{18}+\frac{1^2}{4}-\frac{1}{6}\ln 1\right)=\boxed{\frac{41}{36}-\frac{1}{6}\ln 2}$$

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x-y=2 \\ 3x-z=-1 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=-4-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

se pide:

a) (1 punto) Calcular la posición relativa de las rectas r y s.

b) (0.5 puntos) Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pasa por el punto P(2, −1,5).

c) (1 punto) Encontrar la ecuación del plano paralelo a la recta r que contiene a la recta s.

a) Pasamos la ecuación de la recta r a paramétricas.

$$r \equiv \begin{cases} x-y=2 \\ 3x-z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2+y \\ 3x-z=-1 \end{cases} \Rightarrow 3(2+y)-z=1 \Rightarrow 6+3y-z=-1 \Rightarrow z=7+3y$$

$$r \equiv \begin{cases} x=2+\lambda \\ y=\lambda \\ z=7+3\lambda \end{cases}$$

La recta r pasa por el punto $P_r(2,0,7)$ y tiene vector director $\vec{v}_r(1,1,3)$

La recta s pasa por el punto $P_s(-1,-4,0)$ y tiene vector director $\vec{v}_s(2,-1,1)$

Los vectores directores de las rectas no tienen coordenadas proporcionales por lo que las rectas no son ni coincidentes ni paralelas.

$$\left.\begin{matrix} \vec{v}_r(1,1,3) \\ \vec{v}_s(2,-1,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{3}{1}$$

Calculamos el valor del producto mixto de los vectores $\vec{v}_r(1,1,3)$, $\vec{v}_s(2,-1,1)$ y $\overrightarrow{P_rP_s}$.

$$\left.\begin{matrix} \vec{v}_r(1,1,3) \\ \vec{v}_s(2,-1,1) \\ \overrightarrow{P_rP_s}=(-1,-4,0)-(2,0,7)=(-3,-4,-7) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\vec{v}_r,\vec{v}_s,\overrightarrow{P_rP_s}\right]=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & -4 & -7 \end{vmatrix}=-11\neq 0$$

Como tiene un valor distinto de cero quiere decir que las dos rectas no son coplanarias y se cruzan.

b) El vector normal del plano $\vec{n}$ es el vector director de la recta $\vec{v}_r(1,1,3)$

$$\left.\begin{matrix} P(2,-1,5)\in\pi \\ \vec{n}=\vec{v}_r(1,1,3) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \pi\equiv x+y+3z+D=0 \\ P(2,-1,5)\in\pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2-1+15+D=0 \Rightarrow D=-16$$

$$\boxed{\pi\equiv x+y+3z-16=0}$$

c) Si el plano contiene a la recta s entonces pasa por $P_s(-1,-4,0)$ y tiene como vector director $\vec{v}_s(2,-1,1)$). Como es paralelo a r entonces también tiene como vector director $\vec{v}_r(1,1,3)$.
La ecuación del plano π´ queda:

$$\left.\begin{array}{l} P_s(-1,-4,0)\in\pi \\ \vec{v}=\vec{v}_r(1,1,3) \\ \vec{u}=\vec{v}_s(2,-1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \pi'\equiv\begin{vmatrix} x+1 & y+4 & z \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \boxed{\pi'\equiv-4x-5y+3z-24=0}$$

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Un arquero aficionado dispone de 4 flechas y dispara a un globo colocado en el centro de una diana. La probabilidad de alcanzar el blanco en el primer tiro es del 30%. En los lanzamientos sucesivos la puntería se va afinando, de manera que en el segundo es del 40%, en el tercero del 50% y en el cuarto del 60%. Se pide:
a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que el globo haya explotado sin necesidad de hacer el cuarto disparo.
b) (0.5 puntos) Calcular la probabilidad de que el globo siga intacto tras el cuarto disparo.
c) (1 punto) En una exhibición participan diez arqueros profesionales, que aciertan un 85% de sus lanzamientos. Calcular la probabilidad de que entre los 10 hayan explotado exactamente 6 globos al primer disparo.

a) Nos piden la probabilidad de acertar en uno de los intentos 1º, 2º o 3º.
Llamamos

A_1 a la probabilidad de acertar en el primer intento; $P(A_1)=0,3$

$\bar{A}_1$ a la probabilidad de fallar en el primer intento; $P(\bar{A}_1)=0,7$

A_2 a la probabilidad de acertar en el segundo intento; $P(A_2)=0,4$

$\bar{A}_2$ a la probabilidad de fallar en el segundo intento; $P(\bar{A}_2)=0,6$

A_3 a la probabilidad de acertar en el tercer intento; $P(A_3)=0,5$

$\bar{A}_3$ a la probabilidad de fallar en el tercer intento; $P(\bar{A}_3)=0,5$

A_4 a la probabilidad de acertar en el tercer intento; $P(A_3)=0,6$

$\bar{A}_4$ a la probabilidad de fallar en el tercer intento; $P(\bar{A}_3)=0,4$

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)= P(A_1)\cup P(\bar{A}_1\cap A_2)\cup P(\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap A_3)=0,3+0,7\cdot0,4+0,7\cdot0,6\cdot0,5=0,79$$

$$\boxed{P(A_1\cup A_2\cup A_3)=0,79}$$

b) La probabilidad de fallar los 4 disparos.

$$P(\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3\cap\bar{A}_4)=0,7\cdot0,6\cdot0,5\cdot0,4=0,084 \qquad \boxed{P(\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3\cap\bar{A}_4)=0,084}$$

c) Estas son 10 repeticiones con igual probabilidad de éxito en cada intento, por lo que es una binomial de parámetros:
n = 10
p = P(acertar en el blanco en un disparo) = 0,85

$$P(X=6)=\binom{10}{6}0{,}85^6\cdot 0{,}15^4=\frac{10!}{6!\cdot 4!}0{,}85^6\cdot 0{,}15^4=0{,}04\quad \boxed{P(X=6)=0{,}04}$$

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Según informa la Asociación Empresarial de Acuicultura de España, durante el año 2016 se comercializaron en España doradas, lubinas y rodaballos por un total de 275.8 millones de euros. En dicho informe figura que se comercializaron un total de 13740 toneladas de doradas y 23440 toneladas de lubinas. En cuanto a los rodaballos, se vendieron 7400 toneladas por un valor de 63.6 millones de euros. Sabiendo que el kilo de dorada fue 11 céntimos más caro que el kilo de lubina, se pide calcular el precio del kilo de cada uno de los tres tipos de pescado anteriores.

Si se vendieron 7400 toneladas por un valor de 63.6 millones de euros entonces:

$$\frac{63.600.000}{7.400.000}=\frac{636}{74}=8{,}59€/Kg$$

Si a los 275.8 millones que vale todo el pescado le quitamos los 63.6 del rodaballo nos queda 275.8 – 63.6 = 212.2 millones de euros valen las doradas y las lubinas.
Si llamamos “x” al precio de la lubina nos dicen que el precio de la dorada es 0.11 € más cara. El precio de la dorada es “x + 0.11”.
Tenemos la ecuación:

$$13.740.000(x+0{,}11)+23.440.000x=212.200.000 \Rightarrow 1.374(x+0{,}11)+2.344x=21.220$$
$$1.374x+151{,}14+2.344x=21220 \Rightarrow x=5{,}67€/kg$$

Aproximadamente los precios son: la lubina a 5,67 €/kg, la dorada a 5,67 + 0,11 = 5,78 €/kg y el rodaballo a 8,59 €/kg.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sea la función $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & \text{si } x\le 1\\ (x-1)^3 & \text{si } x>1\end{cases}$
a) (0.5 puntos) Estudie su continuidad en [–4; 4].
b) (1 punto) Analice su derivabilidad y crecimiento en [–4; 4].
c) (1 punto) Determine si la función $g(x)=f'(x)$ está definida, es continua y derivable en x = 1

a) Las dos definiciones son polinómicas y no presentan ningún problema de continuidad. Solo hay que comprobar la continuidad en el momento de cambio de definición.

Comprobamos en x =1.

- Existe $f(1)=(1-1)^2=0$
- Existe $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x-1)^2=(1-1)^2=0$
- Existe $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x-1)^3=(1-1)^3=0$
- Los tres valores son iguales.

Como se cumplen las tres condiciones la función es continua en todo su dominio y en particular en [–4, 4].

b) La derivada de la función es:

$$f'(x)=\begin{cases} 2(x-1) & \text{si } x<1 \\ 3(x-1)^2 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

En x = 1 comprobamos si coinciden sus derivadas laterales.

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^+)=3(1-1)^2=0 \\ f'(1^-)=2(1-1)=0 \end{array}\right\} \text{Coinciden y existe la derivada en } x=1.$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2(x-1) & \text{si } x\le 1 \\ 3(x-1)^2 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Para ver el crecimiento veos dónde se anula cada derivada:

La rama $2(x-1)$ se anula en x = 1, antes de la 1 toma valores negativos y después positivos por lo que, al pedirnos el crecimiento y decrecimiento en el intervalo [–4; 4], diremos que es negativa en (–4,1)

La rama $3(x-1)^2$ es positiva siempre por lo que crece en (1,4)

c) La función $g(x)=f'(x)$ está definida y su expresión es:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-2 & \text{si } x\le 1 \\ 3(x-1)^2 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Cada una de las ramas es continua pues son polinomios y en x = 1 lo comprobamos.

- Existe $g(1)=2-2=0$
- Existe $\lim_{x\to 1^-} g(x)=\lim_{x\to 1^-} 2x-2=0$
- Existe $\lim_{x\to 1^+} g(x)=\lim_{x\to 1^+} 3(x-1)^2=3(1-1)^2=0$
- Los tres valores son iguales.

Como se cumplen las tres condiciones la función g(x) es continua.

Para la derivabilidad en x = 1 vemos si coinciden sus derivadas laterales.

$$g'(x)=\begin{cases} 2 & \text{si } x<1 \\ 6(x-1) & \text{si } x>1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} g'(1^+)=2 \\ g'(1^-)=6(1-1)=0 \end{array}\right\}$$

No coinciden, por lo que no es derivable en x = 1.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dados los puntos P(–3, 1, 2) y Q(–1, 0, 1) y el plano π de ecuación $x+2y-3z=4$, se pide:
a) (1 punto) Hallar la proyección de Q sobre π.
b) (0.5 puntos) Escribir la ecuación del plano paralelo a π que pasa por el punto P.
c) (1 punto) Escribir la ecuación del plano perpendicular a π que contiene a los puntos P y Q.

a) Obtenemos la recta r perpendicular al plano $x+2y-3z=4$ y que pasa por Q:

$$\left.\begin{array}{l} Q(-1,0,1) \\ \vec{n}=\vec{v}_r(1,2,-3) \end{array}\right\} \Rightarrow r\equiv\begin{cases} x=-1+t \\ y=2t \\ z=1-3t \end{cases}$$

Obtenemos ahora el punto de intersección de la recta obtenida con el plano:

$$\left.\begin{array}{l} r\equiv\begin{cases} x=-1+t \\ y=2t \\ z=1-3t \end{cases} \\ \pi\equiv x+2y-3z=4 \end{array}\right\} \Rightarrow -1+t+4t-3+9t=4 \Rightarrow 14t=8 \Rightarrow t=\frac{8}{14}=\frac{4}{7}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=-1+4/7=-3/7 \\ y=2\cdot 4/7=8/7 \\ z=1-3\cdot 4/7=-5/7 \end{array}\right\} \Rightarrow Q'\left(\frac{-3}{7},\frac{8}{7},\frac{-5}{7}\right)$$

b) Si el plano es paralelo a $x+2y-3z=4$ entonces tiene ecuación $x+2y-3z=D$.
Como pasa por P(–3, 1, 2): $-3+2-6=D \Rightarrow D=-7$.
El plano tiene ecuación $\boxed{x+2y-3z=-7}$

c) Si el plano pasa por P y Q tiene como vector director $\overrightarrow{PQ}=(-1,0-1)-(-3,1,2)=(2,-1,-1)$
Al ser perpendicular a $x+2y-3z=4$, el vector normal es director del nuevo plano.

$$\left.\begin{array}{l} Q(-1,0,1)\in\pi' \\ \vec{v}=\overrightarrow{PQ}=(2,-1,-1) \\ \vec{u}=\vec{n}=(1,2,-3) \end{array}\right\} \Rightarrow \pi'\equiv\begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \boxed{\pi'\equiv x+y+z=0}$$

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Se consideran dos sucesos A y B tales que P(A) = 0.5, P(B) = 0.25 y P(A∩B) = 0.125. Responder de manera razonada o calcular lo que se pide en los siguientes casos:
a) (0.5 puntos) Sea C otro suceso, incompatible con A y con B. ¿Son compatibles los sucesos C y A∪B?
b) (0.5 puntos) ¿Son A y B independientes?
c) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad $P(\bar{A}\cap\bar{B})$ (donde $\bar{A}$ denota el suceso complementario al suceso A).
d) (0.75 puntos) Calcular $P(\bar{B}/A)$.

a) Si C es incompatible con A quiere decir que no tienen nada en común $\rightarrow A\cap C=\varnothing$
Si C es incompatible con B quiere decir que no tienen nada en común $\rightarrow B\cap C=\varnothing$

Entonces C no puede tener nada en común con la unión de los dos sucesos, por lo que C es incompatible con AUB.

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)=\varnothing$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B)=0{,}125 \\ P(A)\cdot P(B)=0{,}5\cdot 0{,}25=0{,}125 \end{array}\right\} P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B) \text{ luego son independientes.}$$

c)

$$P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-\left[P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right]=1-(0{,}5+0{,}25-0{,}125)=0{,}375$$

$$\boxed{P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=0{,}375}$$

d) $$P(\bar{B}/A)=\frac{P(\bar{B}\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0{,}5-0{,}125}{0{,}5}=0{,}75$$

$$\boxed{P(\bar{B}/A)=0{,}75}$$

academia@abitaulapinar.com
www.abitaulapinar.com

abitaulapinar.com

C/ Jazmín, 29 (Pinar de Chamartín)
91.056.80.48 / 622.92.94.25