UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso 2019-2020 Extraordinaria
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea A una matriz de tamaño 3×4 tal que sus dos primeras filas son (1, 1, 1, 1) y (1, 2, 3, 4), y sin ningún cero en la tercera fila. En cada uno de los apartados siguientes, se pide poner un ejemplo de matriz A que verifique la condición pedida, justificándolo apropiadamente:

a) (0.5 puntos) La tercera fila de A es combinación lineal de las dos primeras.

b) (0.5 puntos) Las tres filas de A son linealmente independientes.

c) (0.5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema compatible determinado.

d) (0.5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema compatible indeterminado.

e) (0.5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema incompatible

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{si } x<1,\ x\neq -1 \\ \dfrac{x^2+1}{4x} & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular f(0) y $(f\circ f)(0)$.

b) (1.25 puntos) Estudiar la continuidad y derivabilidad de f(x) en x = 1 y determinar si en dicho punto existe un extremo relativo.

c) (0.75 puntos) Estudiar sus asíntotas.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el punto P(3, 3, 0) y la recta $r\equiv\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{0}$, se pide:

a) (0.75 puntos) Escribir la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r.

b) (1 punto) Calcular el punto simétrico de P respecto de r.

c) (0.75 puntos) Hallar dos puntos A y B de r tales que el triángulo ABP sea rectángulo, tenga área $3/\sqrt{2}$ y el ángulo recto en A.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se tienen tres urnas A, B y C. La urna A contiene 4 bolas rojas y 2 negras, la urna B contiene 3 bolas de cada color y la urna C contiene 6 bolas negras. Se elige una urna al azar y se extraen de ella dos bolas de manera consecutiva y sin reemplazamiento. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja.

b) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja y la segunda sea negra.

c) (0.5 puntos) Sabiendo que la primera bola extraída es roja, calcular la probabilidad de que la segunda sea negra.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Se pide:

a) (1 puntos) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz A.
b) (0.5 puntos) Calcular la matriz $C = A^2 - 2I$.
c) (1 punto) Calcular el determinante de la matriz $D=ABB^t$ (donde B^t denota la matriz traspuesta de B).

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

La potencia generada por una pila viene dada por la expresión $P(t)=25t\cdot e^{-t^2/4}$, donde $t > 0$ es el tiempo de funcionamiento.
a) (0.5 puntos) Calcular hacia qué valor tiende la potencia generada por la pila si se deja en funcionamiento indefinidamente.
b) (0.75 puntos) Determinar la potencia máxima que genera la pila y el instante en el que se alcanza.
c) (1.25 puntos) La energía total generada por la pila hasta el instante t, E(t), se relaciona con la potencia mediante $E'(t)=P(t)$, con $E(0) = 0$. Calcular la energía producida por la pila entre el instante $t = 0$ y el instante $t = 2$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Del paralelogramo ABCD, se conocen los vértices consecutivos A(1, 0, −1), B(2, 1, 0) y C(4, 3, −2). Se pide:
a) (1 punto) Calcular una ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento AC y es perpendicular a los segmentos AC y BC.
b) (1 punto) Hallar las coordenadas del vértice D y el área del paralelogramo resultante.
c) (0.5 puntos) Calcular el coseno del ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En un experimento aleatorio hay dos sucesos independientes X, Y. Sabemos que $P(X) = 0{,}4$ y que $P(X\cap\overline{Y})=0{,}08$ (donde $\overline{Y}$ es el suceso complementario de Y). Se pide:
a) (1 punto) Calcular P(Y).
b) (0.5 puntos) Calcular $P(X \cup Y)$.
c) (1 punto) Si X es un resultado no deseado, de manera que consideramos que el experimento es un éxito cuando NO sucede X, y repetimos el experimento en 8 ocasiones, hallar la probabilidad de haber tenido éxito al menos 2 veces.

SOLUCIONES

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sea A una matriz de tamaño 3×4 tal que sus dos primeras filas son (1, 1, 1, 1) y (1, 2, 3, 4), y sin ningún cero en la tercera fila. En cada uno de los apartados siguientes, se pide poner un ejemplo de matriz A que verifique la condición pedida, justificándolo apropiadamente:
a) (0.5 puntos) La tercera fila de A es combinación lineal de las dos primeras.
b) (0.5 puntos) Las tres filas de A son linealmente independientes.
c) (0.5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema compatible determinado.
d) (0.5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema compatible indeterminado.
e) (0.5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema incompatible

a) Por ejemplo: $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\2&3&4&5\end{pmatrix}$

b) Por ejemplo: $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&1&2&2\end{pmatrix}$

c) Por ejemplo: $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&1&2&2\end{pmatrix}$

d) Por ejemplo: $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\2&3&4&5\end{pmatrix}$

e) Por ejemplo: $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&1&1&3\end{pmatrix}$

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dada la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{si } x<1,\ x\neq -1\\ \dfrac{x^2+1}{4x} & \text{si } x\geq 1\end{cases}$, se pide:
a) (0.5 puntos) Calcular f(0) y (f ∘ f)(0).
b) (1.25 puntos) Estudiar la continuidad y derivabilidad de f(x) en x = 1 y determinar si en dicho punto existe un extremo relativo.
c) (0.75 puntos) Estudiar sus asíntotas.

a) Para x=0 cogemos la función: $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$ luego $f(0)=\dfrac{0-1}{0^2-1}=1$ $\boxed{f(0)=1}$

Hacemos la composición: $(f\circ f)(0)=f(f(0))=f(1)$

Para calcular f(1) cogemos la función: $f(x)=\dfrac{x^2+1}{4x}$ y por tanto: $f(1)=\dfrac{1^2+1}{4}=\dfrac{1}{2}$ $\boxed{f(1)=1/2}$

b) Estudio de la continuidad en x=1:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{(x+1)}=\dfrac{1}{2}\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+1}{4x}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\dfrac{1}{2}\\ f(1)=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)=\dfrac{1}{2}$$

Por lo que $\boxed{f(x)\text{ es continua en } x=1}$

Estudio de la derivabilidad:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1-2x(x-1)}{(x^2-1)^2}=\dfrac{-x^2-1+2x}{(x^2-1)^2}=\dfrac{-(x-1)^2}{(x^2-1)^2}=\dfrac{-1}{(x+1)^2} & \text{si } x<1,\ x\neq -1\\ \dfrac{8x^2-4(x^2+1)}{16x^2}=\dfrac{4x^2-4}{16x^2}=\dfrac{x^2-1}{4x^2} & \text{si } x>1\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-1}{(x+1)^2}=\dfrac{-1}{4}\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{4x^2}=0\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to 1^-}f'(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^+}f'(x)\text{, por lo que }\boxed{f(x)\text{ no es derivable en } x=1}$$

Estudio de los extremos:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{(x+1)^2} & \text{si } x<1,\ x\neq -1\\ \dfrac{x^2-1}{4x^2} & \text{si } x>1\end{cases}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{-1}{(x+1)^2}=0 \Rightarrow \text{No solución}\\ \dfrac{x^2-1}{4x^2}=0 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow \text{No solución en su dominio de definición}\end{cases}$$

Miramos entonces qué le ocurre a la función a ambos lados de x=1 y vemos que pasa de decreciente $f'(x)<0$ a creciente $f'(x)>0$, por lo que $\boxed{x=1\text{ es un mínimo relativo}}$

c) Asíntotas:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{si } x<1,\ x\neq -1\\ \dfrac{x^2+1}{4x} & \text{si } x\geq 1\end{cases}$$

Asíntotas verticales:

Los puntos que anulan los denominadores son el 0, el 1 y el -1, pero el único que se encuentra dentro del intervalo de definición es x=-1:

$$\lim_{x\to -1}f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{-2}{0}$$

Hacemos los límites laterales:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{-2}{0^-}=+\infty \quad \lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$$

$\boxed{\text{Hay asíntota vertical en } x=-1}$

Asíntota horizontal:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{x-1}{x^2-1}=0 \Rightarrow \boxed{\text{Hay asíntota horizontal cuando x tiende a } -\infty \text{ en } y=0}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+1}{4x}=\infty \Rightarrow \text{No hay asíntota horizontal cuando x tiende a } +\infty$$

Asíntota oblicua: $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to \infty}\frac{x^2+1}{4x^2}=\frac{1}{4}$$

$$n=\lim_{x\to +\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2+1}{4x}-\frac{x}{4}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{4x}=0$$

Asíntota oblicua en $\boxed{y=\frac{1}{4}x}$

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el punto P(3, 3, 0) y la recta $r\equiv\frac{x-2}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{0}$, se pide:

a) (0.75 puntos) Escribir la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r.
b) (1 punto) Calcular el punto simétrico de P respecto de r.
c) (0.75 puntos) Hallar dos puntos A y B de r tales que el triángulo ABP sea rectángulo, tenga área $3/\sqrt{2}$ y el ángulo recto en A.

a) Obtenemos el vector y un punto de la recta:

$$r\equiv\frac{x-2}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{0} \Rightarrow \begin{cases}\vec{v}_r(-1,1,0)\\ Q(2,0,-1)\end{cases}$$

Obtenemos un vector restando el punto que nos dan P(3, 3, 0) con el punto Q de la recta:

$$\vec{u}=Q-P=(2,0,-1)-(3,3,0)=(-1,-3,-1)$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z+1\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & -3 & -1\end{vmatrix}=0 \Rightarrow -(x-2)-y+4(z+1)=0 \Rightarrow \boxed{x+y-4z-6=0}$$

b) Debemos sacar el plano que pasa por el punto y es perpendicular a la recta, luego cogemos P(3, 3, 0) y como vector director el vector $\vec{v}_r(-1,1,0)$

$-x+y+D=0$ Como pasa por el P(3, 3, 0) $-3+3+D=0 \Rightarrow D=0$ por lo que el plano es: $-x+y=0$

Ahora resolvemos el sistema formado por la recta y el plano:

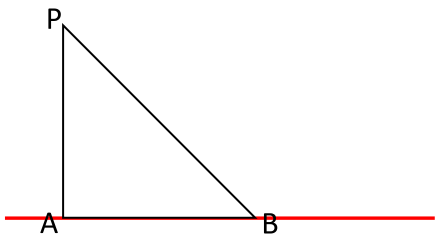
$$r \equiv \left.\begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{cases} \atop -x+y=0 \right\} -(2-\lambda)+\lambda = 0 \Rightarrow -2+2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

Luego el punto proyección ortogonal de P es M(1, 1, -1) que es el punto medio entre P y su simétrico:

$$\frac{P+P'}{2} = M \Rightarrow \frac{(3,3,0)+(x,y,z)}{2} = (1,1,-1) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3+x}{2} = 1 \Rightarrow x = -1 \\ \dfrac{3+y}{2} = 1 \Rightarrow y = -1 \\ \dfrac{z}{2} = -1 \Rightarrow z = -2 \end{cases}$$ Luego el punto pedido es:

$$\boxed{P'(-1,-1,-2)}$$

c) Hallar dos puntos A y B de r tales que el triángulo ABP sea rectángulo, tenga área $3/\sqrt{2}$ y el ángulo recto en A.



El punto A es el que anteriormente hemos llamado M, pues es la proyección ortogonal de P sobre r para que salga ángulo recto, luego A(1, 1, -1)

La altura del triángulo es: $h = |\overrightarrow{AP}| = |(-1,-1,-2)-(1,1,-1)| = |(-2,-2,-1)| = \sqrt{4+4+1} = 3$.

Como el área del triángulo la sabemos, calculamos la base:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{b \cdot 3}{2} \Rightarrow b = \sqrt{2}$$

B será el punto que dista $\sqrt{2}$ de A y como pertenece a r tendrá la forma: $(2-\lambda,\lambda,-1)$

$$\sqrt{2} = |\overrightarrow{AB}| = |(2-\lambda,\lambda,-1)-(1,1,-1)| = |(1-\lambda,\lambda-1,0)| = \sqrt{(1-\lambda)^2+(\lambda-1)^2}$$

$$\sqrt{(1-\lambda)^2+(\lambda-1)^2} = \pm\sqrt{2} \Rightarrow (1-\lambda)^2+(\lambda-1)^2 = \pm 2 \Rightarrow 2-4\lambda+2\lambda^2 = \pm 2$$

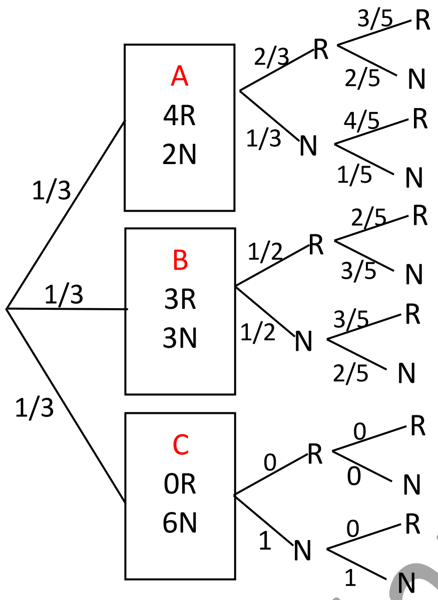
$$2-4\lambda+2\lambda^2 = 2 \Rightarrow 2\lambda^2-4\lambda = 0 \Rightarrow 2\lambda(\lambda-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

$$2-4\lambda+2\lambda^2 = -2 \Rightarrow 2\lambda^2-4\lambda+4 = 0 \Rightarrow \lambda^2-2\lambda+2 = 0 \Rightarrow \text{No solución}$$

Si $\lambda = 0 \Rightarrow \boxed{B(2,0,-1)}$

Si $\lambda = 2 \Rightarrow \boxed{B(0,2,-1)}$

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Se tienen tres urnas A, B y C. La urna A contiene 4 bolas rojas y 2 negras, la urna B contiene 3 bolas de cada color y la urna C contiene 6 bolas negras. Se elige una urna al azar y se extraen de ella dos bolas de manera consecutiva y sin reemplazamiento. Se pide:
a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja.
b) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja y la segunda sea negra.
c) (0.5 puntos) Sabiendo que la primera bola extraída es roja, calcular la probabilidad de que la segunda sea negra.



a) $P(R)=P(A)\cdot P(R/A)+P(B)\cdot P(R/B)+P(C)\cdot P(R/C)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 0=\frac{2}{9}+\frac{1}{6}=\frac{7}{18}$ $\boxed{P(R)=\frac{7}{18}}$

b) $P(1^{a}R\cap 2^{a}N)=P(A)\cdot P(R\cap N/A)+P(B)\cdot P(R\cap N/B)+P(C)\cdot P(R\cap N/C)$

$$P(1^{a}R\cap 2^{a}N)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\cdot 0=\frac{4}{45}+\frac{1}{10}=\frac{17}{90} \qquad \boxed{P(1^{a}R\cap 2^{a}N)=\frac{17}{90}}$$

c) $P(2^{a}N/1^{a}R)=\dfrac{P(1^{a}R\cap 2^{a}N)}{P(1^{a}R)}=\dfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}}{7/18}=\dfrac{\frac{4}{45}+\frac{1}{10}}{7/18}=\dfrac{\frac{17}{90}}{7/18}=\dfrac{17}{35}$ $\boxed{P(2^{a}N/1^{a}R)=\frac{17}{35}}$

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}0&-1&2\\2&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$. Se pide:

a) (1 puntos) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz A.
b) (0.5 puntos) Calcular la matriz C = $A^2 - 2I$.
c) (1 punto) Calcular el determinante de la matriz $D=ABB^t$ (donde B^t denota la matriz traspuesta de B).

a) $A=\begin{pmatrix}0&-1&2\\2&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}0&-1&2\\2&1&-1\\1&0&1\end{vmatrix}=1-2+2=1$

$$A^{adj}=\begin{pmatrix}1&-3&-1\\1&-2&-1\\-1&4&2\end{pmatrix}\Rightarrow \left(A^{adj}\right)^t=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-3&-2&4\\-1&-1&2\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-3&-2&4\\-1&-1&2\end{pmatrix}}$$

b) C = A² – 2 I

$$A^2=\begin{pmatrix}0&-1&2\\2&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-1&2\\2&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&3\\1&-1&2\\1&-1&3\end{pmatrix}$$

$$C=A^2-2I=\begin{pmatrix}0&-1&3\\1&-1&2\\1&-1&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-1&3\\1&-3&2\\1&-1&1\end{pmatrix}\quad \boxed{C=\begin{pmatrix}-2&-1&3\\1&-3&2\\1&-1&1\end{pmatrix}}$$

c) $|ABB^t|=|A||BB^t|$

$$B\cdot B^t=\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&2&-1\\2&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow |B\cdot B^t|=5-1-4=0$$

$$|ABB^t|=|A||BB^t|=1\cdot 0=0\Rightarrow \boxed{|ABB^t|=0}$$

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

La potencia generada por una pila viene dada por la expresión $P(t)=25t\cdot e^{-t^2/4}$, donde t > 0 es el tiempo de funcionamiento.

a) (0.5 puntos) Calcular hacia qué valor tiende la potencia generada por la pila si se deja en funcionamiento indefinidamente.

b) (0.75 puntos) Determinar la potencia máxima que genera la pila y el instante en el que se alcanza.

c) (1.25 puntos) La energía total generada por la pila hasta el instante t, E(t), se relaciona con la potencia mediante $E'(t)=P(t)$, con E(0) = 0. Calcular la energía producida por la pila entre el instante t = 0 y el instante t = 2.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} 25t\cdot e^{-t^2/4}=\infty\cdot 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 25t\cdot e^{-t^2/4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{25t}{e^{t^2/4}}=\dfrac{\infty}{\infty}$ Aplicamos la regla de L´Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{25t}{e^{t^2/4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{25}{\frac{t}{2}e^{t^2/4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{50}{te^{t^2/4}}=\frac{50}{\infty}=0\ \boxed{\text{La potencia tiende a 0}}$$

b) Potencia máxima:

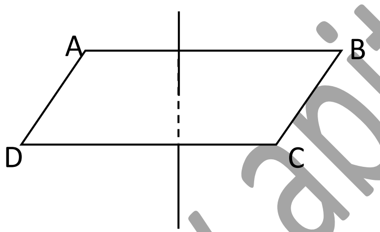
$$P'(t)=0\ \Rightarrow\ 25\cdot e^{-t^2/4}-25t\cdot\frac{t}{2}e^{-t^2/4}=0\ \Rightarrow\ 25e^{-t^2/4}\left(1-\frac{t^2}{2}\right)=0\ \Rightarrow\ 1-\frac{t^2}{2}=0\ \Rightarrow t=\sqrt{2}$$

$$P'(t)=\ 25e^{-t^2/4}\left(1-\frac{t^2}{2}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}P'(0)=\ 25>0\\ P'(2)=\ -\frac{25}{e}<0\end{array}\right\}\ \boxed{\text{En } x=\sqrt{2} \text{ hay un máximo}}$$

La potencia máxima alcanzada es: $P_{máx}=P\left(\sqrt{2}\right)=25\sqrt{2}\cdot e^{-2/4}=21{,}44$ $\boxed{P_{máx}=21{,}44}$

c) $E(2)=\int_0^2 P(t)dt=\int_0^2 25t\cdot e^{-\frac{t^2}{4}}dt=-25\cdot 2\int_0^2 -\frac{t}{2}\cdot e^{-\frac{t^2}{4}}dt=\left[-50e^{-\frac{t^2}{4}}\right]_0^2=50-\frac{50}{e}=31{,}61$ $\boxed{E(2)=31{,}61}$

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Del paralelogramo ABCD, se conocen los vértices consecutivos A(1, 0, −1), B(2, 1, 0) y C(4, 3, −2). Se pide:
a) (1 punto) Calcular una ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento AC y es perpendicular a los segmentos AC y BC.
b) (1 punto) Hallar las coordenadas del vértice D y el área del paralelogramo resultante.
c) (0.5 puntos) Calcular el coseno del ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$



Punto medio de AC: $M_{AC}=\frac{(1,0,-1)+(4,3,-2)}{2}=\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2},\frac{-3}{2}\right)$

Vector AC: $\overrightarrow{AC}=C-A=(4,3,-2)-(1,0,-1)=(3,3,-1)$

Vector BC: $\overrightarrow{BC}=C-B=(4,3,-2)-(2,1,0)=(2,2,-2)$

Vector de la recta: $\vec{V}_r=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&3&-1\\2&2&-2\end{vmatrix}=(-4,4,0)$

La recta pedida esa: $\boxed{r\equiv\left\{\begin{array}{l}x=5/2-\lambda\\ y=3/2+\lambda\\ z=-3/2\end{array}\right.}$

b) El vértice D es el simétrico de B con respecto al punto medio de AC:

$$\frac{(2,1,0)+(x,y,z)}{2}=\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2},\frac{-3}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} 2+x=5 \Rightarrow x=3 \\ 1+y=3 \Rightarrow y=2 \\ z=-3 \end{cases} \quad \boxed{D(3,2,-3)}$$

El área del paralelogramo es:

$$A=\overrightarrow{AB}\ x\ \overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix}=\left|(-4,4,0)\right|=\sqrt{(-4)^2+4^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}\ u^2 \quad \boxed{A=4\sqrt{2}\ u^2}$$

$$c)\ \cos\alpha=\left|\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}\right|=\left|\frac{3+3-1}{\sqrt{1+1+1}\sqrt{9+9+1}}\right|=\frac{5}{\sqrt{3}\sqrt{19}}=\frac{5}{\sqrt{57}}=\frac{5\sqrt{57}}{57} \quad \boxed{\cos\alpha=\frac{5\sqrt{57}}{57}}$$

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En un experimento aleatorio hay dos sucesos independientes X, Y. Sabemos que P(X) = 0,4 y que $P(X\cap\overline{Y})=0,08$ (donde $\overline{Y}$ es el suceso complementario de Y). Se pide:

a) (1 punto) Calcular P(Y).

b) (0.5 puntos) Calcular P(X ∪ Y).

c) (1 punto) Si X es un resultado no deseado, de manera que consideramos que el experimento es un éxito cuando NO sucede X, y repetimos el experimento en 8 ocasiones, hallar la probabilidad de haber tenido éxito al menos 2 veces.

$$a)\ P(X\cap\overline{Y})=P(X)-P(X\cap Y)=P(X)-P(X)\cdot P(Y) \Rightarrow P(Y)=\frac{P(X)-P(X\cap\overline{Y})}{P(X)}$$

$$P(Y)=\frac{0,4-0,08}{0,4}=0,8 \Rightarrow \boxed{P(Y)=0,8}$$

$$b)\ P(X\cup Y)=P(X)+P(Y)-P(X\cap Y)=P(X)+P(Y)-P(X)\cdot P(Y)=0,4+0,8-0,4\cdot 0,8=0,88$$

$$\boxed{P(X\cup Y)=0,88}$$

c) Se trata de 8 pruebas de Bernoulli con probabilidad de éxito p = P(X) = 1 – 0,4 = 0,6, y queremos hallar la probabilidad de tener al menos 2 éxitos:

$$P(n\geq 2)=1-\left[P(n=0)+P(n=1)\right]=1-\left[\binom{8}{0}0,6^0\cdot 0,4^8+\binom{8}{1}0,6^1\cdot 0,4^7\right]=0,991$$

$$\boxed{P=0,991}$$