FORMULARIO CAMPO GRAVITATORIO

Fuerzas centrales:

Son aquellas que, independientemente del movimiento que realice el cuerpo sobre el que actúa, su dirección pasa siempre por un punto fijo (centro de fuerzas). Dicha dirección es siempre la de la recta que une dicho punto con el cuerpo.

- Son siempre conservativas.
- El trabajo a lo largo de un ciclo es nulo.
- El trabajo no depende de la trayectoria seguida sino de la posición inicial y final.
- La energía mecánica es constante.

El movimiento de una partícula sometida a fuerzas centrales cumple que:

- Se conserva la energía mecánica.
- Se conserva el momento angular: constante el módulo, dirección y sentido.

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v} \qquad \text{Conservación: } |\vec{L}_0| = |\vec{L}_F|$$

Podemos deducir la velocidad aerolar: $\boxed{v_{erolar}=\frac{dA}{dt}=\frac{L}{2m}=cte}$

Ley de la Gravitación Universal:

Entre dos partículas materiales existe una fuerza de atracción que es proporcional al producto de sus asas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa.

$$\boxed{\vec{F}=-G\cdot\frac{m_1\cdot m_2}{r^2}\cdot\vec{u}_r \text{ (N)}} \qquad \text{En módulo: } F=G\cdot\frac{m_1\cdot m_2}{r^2} \text{ (N)}$$

Donde: $G=6{,}67\cdot10^{-11}\ N\cdot m^2/Kg^2$

3ª. Ley de Kepler:

El cuadrado del periodo del planeta es directamente proporcional al cubo de su distancia media al Sol.

Deducción: Partícula sometida a una fuerza central:

$$\left.\begin{array}{l} F_c=m\cdot a_c=m\cdot\frac{v^2}{r}=m\cdot\omega^2\cdot r=m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r \\ F_g=G\frac{Mm}{r^2} \end{array}\right\} F_c=F_g \Rightarrow \cancel{m}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r=G\frac{M\cancel{m}}{r^2}$$

$$4\pi^2\cdot r^3=G\cdot M\cdot T^2 \Rightarrow T^2=\frac{4\pi^2}{GM}r^3 \Rightarrow T^2=K\cdot R^3 \Rightarrow \frac{T^2}{R^3}=K \Rightarrow \boxed{\frac{T_1^2}{R_1^3}=\frac{T_2^2}{R_2^3}}$$

Intensidad de campo gravitatorio:

Es la fuerza por unidad de masa calculada en un punto.

$$\boxed{\vec{g}=\frac{\vec{F}}{m}=-G\cdot\frac{M}{r^2}\cdot\vec{u}_r \ (N/Kg \text{ o } m/s^2)} \qquad \text{En módulo: } g=G\frac{M}{r^2}\ \left(N/Kg \text{ ó } m/s^2\right)$$

- Campo gravitatorio en la superficie terrestre:

$$g_0=-\frac{G\cdot M_T}{R_T{}^2}=-9{,}8\ m/s^2 \Rightarrow \boxed{-G\cdot M_T=-9{,}8\cdot R_T{}^2}$$

Esta última ecuación es comodín para cuando no nos dan la masa de la Tierra.

- Peso de un cuerpo: $\boxed{P=G\cdot\frac{M_T\cdot m}{R_T{}^2}=g_0\cdot m \text{ (N)}}$

Energía potencial gravitatoria:

$$\boxed{E_p = -G\frac{M\cdot m}{r}\ (J)}$$ NOTA: La E_p siempre es negativa. E_p en el infinito es nula.

- Variación de la energía potencial entre dos puntos:

$$\Delta E_p = E_p(B) - E_p(A) = -\left(G\frac{M\cdot m}{r_B} - G\frac{M\cdot m}{r_A}\right) = G\cdot M\cdot m\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)\ (J)$$

Potencial gravitatorio:

Es la energía potencial por unidad de masa en un punto.

$$\boxed{V = \frac{E_p}{m} = -G\frac{M}{r}\ \left(J/Kg\right)}$$

Trabajo para desplazar una masa entre dos puntos:

$$\boxed{W_{A-B} = -\Delta E_p = E_p(A) - E_p(B)\ (J)} \qquad \boxed{W_{A-B} = m\left(V_A - V_B\right)\ (J)}$$

$W > 0$: Espontáneo (lo realiza el propio campo). La E_p disminuye (cuando se acercan dos masas)
$W < 0$: Forzado (lo realiza una fuerza exterior al sistema). Cuando se separan dos masas.

Velocidad de escape.

Es la mínima velocidad que debe adquirir un cuerpo para escapar del campo gravitatorio del planeta en el que está, bien sea en su superficie u orbitando alrededor de él.

$$E_{mi} = E_{mf} \Rightarrow \frac{1}{2}m\cdot v_e^2 - G\frac{M\cdot m}{r} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}m\cdot v_e^2 = G\frac{M\cdot m}{r} \Rightarrow \boxed{v_e = \sqrt{2\frac{G\cdot M}{r}}}$$

- En la superficie del planeta: Utilizando la ecuación comodín $v_e = \sqrt{2g_0R}$
- A una altura h: $v_e = \sqrt{2\frac{G\cdot M}{R+h}} = \sqrt{2\frac{g_0\cdot R^2}{R+h}}$

Velocidad de lanzamiento desde la superficie terrestre del planeta de radio R para que un cohete alcance una altura h sobre la superficie del planeta:

Por conservación de la energía mecánica:

$$E_{mi} = E_{mf} \Rightarrow \frac{1}{2}m\cdot v_e^2 - G\frac{M\cdot m}{R} = 0 - G\frac{M\cdot m}{R+h} \Rightarrow \boxed{v_l = \sqrt{2\cdot G\cdot M\cdot m\frac{h}{R(R+h)}}}$$

Velocidad orbital de un satélite:

Se deduce igualando la fuerza gravitatoria a la centrípeta: $F_g = F_c$

$$\left.\begin{array}{l} F_g = G\frac{M\cdot m}{r^2} \\ F_c = m\frac{v^2}{r} \end{array}\right\} G\frac{M\cdot m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow G\frac{M}{r} = v^2 \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{G\frac{M}{r}}\ \ (m/s)}$$

A partir de esta fórmula obtenemos el periodo de revolución:

- Tiempo necesario para que describa una órbita completa.

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}} = \frac{2\pi r\sqrt{r}}{\sqrt{G\cdot M}} \Rightarrow \boxed{T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{G\cdot M}}} \text{ o bien } \boxed{T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{g_o\cdot R^2}}}$$

- De esta expresión podemos deducir la 3ª Ley de Kepler:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{G\cdot M}} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{G\cdot M} \Rightarrow T^2 = K\cdot r^3$$

Lanzamiento de satélites artificiales:

Llevamos el satélite a una altura h y desde esa altura se lanza con una velocidad horizontal v_0, el tipo de trayectoria que describe el satélite despende de esa velocidad con que se lanza:

Velocidad del satélite	Órbita	Energía mecánica
$v_0<v_{orb}$	Elipse incompleta	Negativa
$v_0=v_{orb}$	Circunferencia	Negativa
$v_{orb}<v_0<v_e$	Elipse	Negativa
$v_0=v_e$	Parábola	Nula
$v_0>v_e$	Hipérbola	Positiva

V_{orb} es la velocidad orbital

v_e es la velocidad de escape de la órbita

Energía mecánica de un satélite en su órbita cerrada

Es la suma de sus energías cinética y potencial:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}E_C=\dfrac{1}{2}mv_{orb}^2\\ v_{orb}=\sqrt{\dfrac{GM}{r}}\end{array}\right\}E_C=\dfrac{1}{2}m\dfrac{GM}{r}\\ E_p=-G\dfrac{M\cdot m}{r}\end{array}\right\}\Rightarrow E_m=E_c+E_p=\dfrac{1}{2}m\dfrac{GM}{r}-G\dfrac{M\cdot m}{r}=-G\dfrac{M\cdot m}{2r}\quad \boxed{E_m=-G\dfrac{M\cdot m}{2r}\ (J)}$$

Energía necesaria para cambiar de órbita un satélite:

Hay que realizar un trabajo equivalente a la diferencia entre las energías de cada órbita:

$$\Delta E_m=E_m(f)+E_m(i)=-G\frac{M\cdot m}{2\cdot r_f}+G\frac{M\cdot m}{2\cdot r_i}=\frac{G\cdot M\cdot m}{2}\left(\frac{1}{r_i}-\frac{1}{r_f}\right)\quad \boxed{\Delta E_m=\frac{G\cdot M\cdot m}{2}\left(\frac{1}{r_i}-\frac{1}{r_f}\right)}$$

Satélites geoestacionarios:

Satélites que se encuentras siempre sobre el mismo punto de la superficie. Esto significa que el periodo de revolución alrededor del planeta es el mismo que el del planeta sobre su eje. En el caso de la Tierra: 24 horas.